



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Uma Jornada aos Sistemas Inversos de Macaulay, Anéis
Gorenstein e às Propriedades de Lefschetz**

Henrique Bernardino das Chagas

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Henrique Bernardino das Chagas

**Uma Jornada aos Sistemas Inversos de Macaulay, Anéis
Gorenstein e às Propriedades de Lefschetz**

Trabalho apresentado ao Programa de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural De Pernambuco - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

C427j Chagas, Henrique Bernardino das.
Uma jornada aos sistemas inversos de Macaulay,
anéis Gorenstein e às propriedades de Lefschetz /
Henrique Bernardino das Chagas. – Recife, 2025.
65 f.

Orientador(a): Thiago Dias Oliveira Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Anéis (Álgebra) . 2. Problemas inversos
(Equações diferenciais). 3. Teorema de Lefschetz. 4.
Módulos (Álgebra) 5. Topologia algébrica. I. Silva,
Thiago Dias Oliveira, orient. II. Título

CDD 510

Henrique Bernardino das Chagas

Uma Jornada aos Sistemas Inversos de Macaulay, Anéis Gorenstein e às Propriedades de Lefschetz

Trabalho apresentado ao Programa de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural De Pernambuco - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Prof. Dr. Clessius Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Recife

2025

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Damiana Bernardino das Chagas e Fábio Roberto Tabosa das Chagas pelo apoio incondicional, sem o qual eu não estaria aqui. Sou infinitamente grato por tudo que a mim foi proporcionado, por meio de muita luta e esforço para que eu conquistasse meus sonhos através dos estudos.

Expresso minha gratidão também a mim mesmo, por todo esforço, dedicação e persistência que tive até aqui.

Aos meus amigos, pelo apoio em todos os momentos. Cito, em especial, Lucas, pelo companheirismo, paciência, apoio e companhia e Karolayne, onde, desde o 9º ano do ensino fundamental, sempre me apoiou em todos os momentos, sendo uma verdadeira irmã. Cito também o grupo de amigos que a universidade me concedeu o privilégio de conhecer: Dayza, Fernando, Ícaro, Leonardo, Victória e Vitória, obrigado por todo companheirismo e por tornar meus dias na universidade mais leves.

Aos meus parentes que me apoiaram desde sempre. Em especial, cito meus primos Marco e Júlio, que me incentivaram e apoiaram, principalmente durante o ensino médio e o vestibular.

Agradeço aos meus professores do ensino básico, sem os quais, eu não teria chegado até aqui. Em especial, gostaria de citar Ivone, Márcia e Elizabeth, que foram as principais inspirações para que eu seguisse a carreira docente, sempre transmitindo conhecimentos com muito amor, dedicação e certeza de que a educação transforma pessoas.

Externalizo minha gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago Dias, por toda paciência, apoio e por ter acreditado em mim, guiando-me na criação deste trabalho com toda sua sabedoria e muita dedicação.

Além disso, agradeço a todos os professores que tive o prazer de conhecer durante a graduação, seus ensinamentos estarão sempre guardados.

As ciências matemáticas ostentam ordem, simetria e contenção; e tais são as grandes características da beleza.

-Aristóteles

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre anéis artinianos Gorenstein e suas propriedades, com foco nas conexões com a Propriedade de Lefschetz e os Sistemas Inversos de Macaulay. Inicialmente, são introduzidas as teorias dos anéis, álgebras e módulos, fundamentais para a compreensão dos resultados mais avançados. Em seguida, é discutida a construção dos sistemas inversos de Macaulay, ferramenta chave para o desenvolvimento da teoria dos anéis Gorenstein. O trabalho culmina com a exploração das Propriedades de Lefschetz, tanto em sua forma fraca quanto forte, enfatizando suas características singulares. Os resultados obtidos contribuem para uma melhor compreensão da álgebra comutativa.

Palavras-chaves: Anéis Gorenstein, Sistemas Inversos, Propriedades de Lefschetz.

Abstract

This work presents an study of Artinian Gorenstein rings and their properties, focusing on the connections with the Lefschetz Property and Macaulay's Inverse Systems. Initially, the theories of rings, algebras, and modules are introduced, which are fundamental for understanding more advanced results. Then, the construction of Macaulay's inverse systems is discussed, a key tool in the development of the theory of Gorenstein rings. The work culminates in an exploration of the Lefschetz Properties, both in their weak and strong forms, emphasizing their unique characteristics. The results obtained contribute to a better understanding of commutative algebra.

Keywords: Gorenstein Rings, Inverse Systems, Lefschetz Properties.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	19
2.1	Teoria dos Anéis e Álgebras	19
2.2	Teoria dos Módulos	28
3	GRADUAÇÕES E SISTEMAS INVERSOS DE MACAULAY	33
3.1	Gradações	33
3.2	Sistemas Inversos de Macaulay	35
4	ANÉIS ARTINIANOS GORENSTEIN	45
4.1	Módulos e Anéis Artinianos	45
4.2	Função de Hilbert	45
4.3	Anéis Gorenstein	46
5	PROPRIEDADES DE LEFSCHETZ	53
5.1	Propriedade de Lefschetz Fraca	53
5.2	Propriedade de Lefschetz Forte	57
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	63

1 Introdução

A Álgebra Comutativa é uma área importante da matemática, oferecendo meios essenciais para a análise de estruturas algébricas. Neste contexto, os Anéis Artinianos Gorenstein e as Propriedades de Lefschetz emergem como um objeto de estudo de grande relevância para a área, não apenas por suas importantes propriedades, mas também por suas aplicações em outras áreas da matemática, como geometria e combinatória.

Este trabalho visa explorar os Anéis Gorenstein, com um foco especial nas suas caracterizações, construídas por meio de conceitos dos Sistemas Inversos de Macaulay. Além disso, também são abordadas as Propriedades de Lefschetz Fracas e Fortes e suas caracterizações. A escolha desse tema se justifica pela importância crescente das Propriedades de Lefschetz no desenvolvimento de pesquisas contemporâneas, relacionando-as principalmente às áreas de álgebra, geometria e combinatória.

A primeira parte deste trabalho será dedicada à fundamentação teórica, onde apresentaremos os conceitos básicos de anéis, álgebras e módulos, estabelecendo um alicerce necessário para a compreensão dos tópicos subsequentes. Na sequência, abordaremos a construção dos Sistemas Inversos de Macaulay, que são de extrema importância e relevância para a análise de anéis Gorenstein, que é o assunto referente à terceira parte deste trabalho. Por fim, discutiremos as Propriedades de Lefschetz, tanto em sua forma fraca quanto forte, destacando suas propriedades.

Através deste estudo, pretende-se não apenas apresentar resultados teóricos, mas também fomentar uma reflexão crítica sobre as interações entre os diversos conceitos abordados, contribuindo assim para um entendimento mais profundo da estrutura e das propriedades dos Anéis Artinianos Gorenstein e das Propriedades de Lefschetz. A expectativa é que este trabalho sirva para estudos à nível de iniciação científica, ampliando o entendimento sobre anéis artinianos Gorenstein e Propriedades de Lefschetz e contribuindo para o desenvolvimento contínuo da matemática.

2 Preliminares

2.1 Teoria dos Anéis e Álgebras

Definição 2.1.1. *Seja A um conjunto não vazio munido com duas operações: uma adição $(+)$ e uma multiplicação $(*)$. Dizemos que $(A, +, *)$ é um **anel** quando para quaisquer $a, b, c \in A$, tivermos:*

- i) $(A, +)$ é um grupo¹ aditivo comutativo;*
- ii) (Associatividade da multiplicação): $a * (b * c) = (a * b) * c$;*
- iii) (Distributividade da adição à esquerda): $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$;*
- vi) (Distributividade da adição à direita): $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$.*

Exemplo 2.1.1. *O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} , munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um anel. De fato:*

- $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo aditivo comutativo, pois:
 - A adição em \mathbb{Z} é associativa e comutativa;
 - Existe o elemento neutro $0 \in \mathbb{Z}$;
 - Para cada $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.
- A multiplicação é associativa, ou seja, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- A multiplicação é distributiva em relação à adição, tanto à esquerda quanto à direita: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

¹ Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação $(*)$. Dizemos que G é um grupo se, para todo $a, b, c \in G$, tivermos:

- i) (Associatividade): $a * (b * c) = (a * b) * c$;
- ii) (Elemento neutro): $a * e = a = e * a, \forall e \in G$;
- iii) (Elemento inverso): $a * b = e = b * a, \forall e \in G$.

Definição 2.1.2. *Seja A um anel e $B \subset A$ não vazio. Dizemos que B é um **subanel** de A quando, munido com as operações de A , B é anel.*

Exemplo 2.1.2. *Considere $A = \mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros com as operações usuais de adição e multiplicação, e o subconjunto $B = \mathbb{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, o conjunto dos números pares. Vamos provar que \mathbb{P} está contido em \mathbb{Z} e que, com as operações herdadas de \mathbb{Z} , \mathbb{P} é um anel.*

- **Inclusão:** *Para todo $a \in \mathbb{P}$, por definição, $a = 2n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Como \mathbb{Z} é fechado em relação à multiplicação por inteiros, $2n \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}$.*
- **Verificação das propriedades do anel:**
 - *Fechamento em relação à adição: Se $a, b \in \mathbb{P}$, então $a = 2n$ e $b = 2m$ para alguns $n, m \in \mathbb{Z}$. Assim, $a + b = 2n + 2m = 2(n + m) \in \mathbb{P}$.*
 - *Fechamento em relação à multiplicação: Se $a, b \in \mathbb{P}$, então $a = 2n$ e $b = 2m$ para alguns $n, m \in \mathbb{Z}$. Assim, $a \cdot b = (2n)(2m) = 4nm = 2(2nm) \in \mathbb{P}$.*
 - *Neutro aditivo: O neutro aditivo em \mathbb{Z} é 0 , e como $0 = 2 \cdot 0$, temos $0 \in \mathbb{P}$.*
 - *Oposto aditivo: Para todo $a \in \mathbb{P}$, $a = 2n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. O oposto de a em \mathbb{Z} é $-a = -2n = 2(-n) \in \mathbb{P}$.*
 - *Associatividade da adição e multiplicação: Essas propriedades são herdadas diretamente de \mathbb{Z} , pois $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}$.*
 - *Distributividade: A distributividade também é herdada de \mathbb{Z} , já que \mathbb{P} utiliza as operações de \mathbb{Z} .*

Assim, \mathbb{P} é um anel com as operações herdadas de \mathbb{Z} e, portanto, é um subanel de \mathbb{Z} .

Definição 2.1.3. *Seja A um anel. Se A conta com elemento neutro para a multiplicação, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$, $1_A \neq 0_A$, tal que $a * 1_A = 1_A * a = a$, qualquer que seja $a \in A$, então se diz que 1_A é a unidade de A , e que A é um anel com unidade.*

A partir daqui, vamos assumir que todos os anéis têm o 1_A , ou seja, que todos são anéis com unidade.

Definição 2.1.4. *Seja A um anel. Um elemento $a \in A$ é chamado de*

- **divisor de zero** se $a \neq 0$, e se existe $b \in A; b \neq 0$ tal que $ab = 0$.
- **nilpotente** se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
- **idempotente** se $a^2 = a$ (e portanto, $a^n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Definição 2.1.5. *Seja A um anel. Dizemos que A é*

- **comutativo** se a multiplicação é comutativa, isto é, se $a * b = b * a, \forall a, b \in A$.
- **corpo** Se A é comutativo e todo elemento não nulo de A possuir inverso multiplicativo. Isto é, para cada $a \in A$ não-nulo, existe a^{-1} tal que, $a * a^{-1} = 1_A$
- **domínio de integridade** se A é comutativo e não possui divisores de zero.
- **reduzido** se não tem nilpotentes além do zero.
- **indecomponível** se seus únicos idempotentes são 0 e 1 .

Proposição 2.1.1. *Todo corpo é um domínio de integridade.*

Demonstração. Seja A um corpo. Suponha, por contradição, que existem $a, b \in A$ dois elementos não nulos tais que $ab = 0$. Como um corpo tem inversos multiplicativos, então

$$\begin{aligned} a^{-1} * ab &= a^{-1} * 0 \\ \Rightarrow 1_A * b &= 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \end{aligned}$$

Isso é uma contradição, porque assumimos que b era não nulo. Portanto, em um corpo, o produto de quaisquer dois elementos não nulos não pode ser zero. Isso mostra que todo corpo é um domínio de integridade. \square

Definição 2.1.6. *Seja A um anel e I um subconjunto de A . Dizemos que I é um **ideal** de A quando temos:*

- i) $x - y \in I, \forall x, y \in I$;
- ii) $a * x \in I$ e $x * a \in I, \forall x \in I$ e $\forall a \in A$.

Exemplo 2.1.3. *No anel \mathbb{Z} , para qualquer inteiro n , $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$ é um ideal de \mathbb{Z} . De fato:*

- Se $x, y \in \mathbb{Z}$, então $x = rn$ e $y = sn$, para convenientes inteiros r e s . Logo, $x - y = rn - sn = (r - s)n$, em que $r - s$ é inteiro. De onde, $x - y \in n\mathbb{Z}$.
- Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $x \in n\mathbb{Z}$; então $x = nq, q \in \mathbb{Z}$, e, portanto, $ax = a(nq) = (aq)n$, em que aq é inteiro. O que mostra que $ax \in n\mathbb{Z}$.

Definição 2.1.7. *Sejam I e J ideais em um anel comutativo A . A soma desses ideais é o subconjunto de A indicado por $I + J$, e definido como:*

$$I + J = \{x + y : x \in I, e y \in J\}$$

Proposição 2.1.2. *Se I e J são ideais de um anel comutativo A , então:*

i) $I + J$ contém I e J .

ii) Todo ideal em A que contém I e contém J também contém $I + J$.

Demonstração. i) Seja $x \in I$. Como $x = x + 0$, e $0 \in J$, então $x \in I + J$, logo, $I + J \supset I$. Analogamente, seja $y \in J$. Como $y = y + 0$, e $0 \in I$, então $y \in I + J$, logo, $I + J \supset J$.

ii) Seja L um ideal em A tal que $L \supset I$ e $L \supset J$. Devemos provar que todo elemento de $I + J$ também é um elemento de L . De fato, se $r \in I + J$, então $r = x + y$, tal que $x \in I$ e $y \in J$. Como $L \supset I$, então $x \in L$; e como $L \supset J$, então $y \in L$. Logo, $x + y = r \in L$, como queríamos demonstrar. \square

Definição 2.1.8. *Seja A um anel comutativo com unidade:*

- Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ um subconjunto de A . Definimos o **ideal gerado** por X de A como $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n; x_i \in A\}$
- Um ideal I de A é dito **ideal principal** quando $I = \langle a \rangle = \{x * a; x \in A\}$ para algum elemento $a \in A$.
- Um ideal I de A é dito **finitamente gerado** quando existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tais que $I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Definição 2.1.9. *Sejam I e J dois ideais de um anel A . O conjunto:*

$$(I : J) = \{x \in A : (x \cdot b) \in I, \forall b \in J\}$$

É chamado de **condutor** de J à I .

Exemplo 2.1.4. *Seja $A = \mathbb{Z}$ o anel dos números inteiros, com os ideais $I = 6\mathbb{Z}$, e $J = 3\mathbb{Z}$. O condutor de J à I é o conjunto $x \in \mathbb{Z}$ tais que $x * b \in 6\mathbb{Z}$, para todo $b \in 3\mathbb{Z}$, ou seja, $3x$ deve ser múltiplo de 6. Isso implica que x deve ser múltiplo de 2, logo:*

$$(6\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$$

Proposição 2.1.3. *Seja A um anel e I um ideal de A . Se o anel possui unidade, e se algum elemento inversível do anel pertence à I , então $I = A$.*

Demonstração. Como $I \subset A$, basta mostrar que $A \subset I$. Para isso, tomemos um elemento genérico a do anel. Temos que $a = a \cdot 1$, onde 1 é a unidade do anel. Tomando-se um elemento inversível $u \in I$, o que é garantido pela hipótese, então, para algum $v \in A$, $uv = 1$. Portanto,

$$a = a \cdot 1 = a(uv) = (av)u$$

Observando-se que $av \in A$ e $u \in I$, então $a = (av)u \in I$. Se todo elemento de A pertence à I , então $A \subset I$, como queríamos demonstrar. \square

Definição 2.1.10. *Seja A um anel e $I \subseteq A$ um ideal. Definimos a relação de congruência módulo I em A por*

$$a \equiv b \pmod{I} \iff a - b \in I.$$

*Essa relação é uma relação de equivalência em A , cujas classes de equivalência são chamadas de **classes laterais** do ideal I , denotadas por uma das seguintes formas:*

$$a + I = a \pmod{I} = \bar{a} \in A/I, \quad (a \in A).$$

O conjunto dessas classes laterais é denotado por A/I , isto é,

$$A/I = \{a + I \mid a \in A\}.$$

Definimos sobre A/I as operações de soma e multiplicação dadas por:

$$i) (a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad \forall a, b \in A;$$

$$ii) (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I, \quad \forall a, b \in A.$$

Essas operações estão bem definidas, ou seja, se $a \equiv a' \pmod{I}$ e $b \equiv b' \pmod{I}$, então:

$$(a + I) + (b + I) = (a' + I) + (b' + I), \quad (a + I) \cdot (b + I) = (a' + I) \cdot (b' + I).$$

Isso decorre do fato de que I é um ideal, garantindo que as operações não dependem da escolha dos representantes das classes.

*O conjunto A/I , munido dessas operações, forma um anel, chamado de **anel quociente** de A por I .*

Exemplo 2.1.5. *Considere o anel $A = \mathbb{Z}$ e o ideal $I = 5\mathbb{Z}$, com as operações de adição e multiplicação usuais. Temos que:*

- $0 + I = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\} = I$
- $1 + I = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$
- $2 + I = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$
- $3 + I = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$
- $4 + I = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}$
- $5 + I = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots\} = I$

Portanto, o anel quociente de A por I é $A/I = \{I, 1 + I, 2 + I, 3 + I, 4 + I\}$.

Sendo $A/I = \{I, 1 + I, 2 + I, 3 + I, 4 + I\}$, são alguns exemplos de adição entre seus elementos: $(2+I)+(1+I) = (2+1)+I = 3+I$, e $(2+I)+(4+I) = (2+4)+I = 6+I = 1+I$.

Sendo $A/I = \{I, 1 + I, 2 + I, 3 + I, 4 + I\}$, alguns exemplos de multiplicação entre seus elementos são: $(2 + I) * I = (2 + I) * (0 + I) = (2 * 0) + I = 0 + I = I$, e $(2 + I) * (4 + I) = (2 * 4) + I = 8 + I = 3 + I$.

Definição 2.1.11. *Sejam A_1 e A_2 anéis. Dizemos que a função $f : A_1 \rightarrow A_2$ é um homomorfismo quando tivermos:*

$$i) f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in A_1;$$

$$ii) f(a * b) = f(a) * f(b), \forall a, b \in A_1.$$

Exemplo 2.1.6. *Quaisquer que sejam os anéis A e B , a aplicação $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 0_B$, $x \in A$, é um homomorfismo de anéis, já que:*

- $f(a + b) = 0_B = 0_B + 0_B = f(a) + f(b)$;
- $f(a * b) = 0_B = 0_B * 0_B = f(a) * f(b)$.

Definição 2.1.12. *Seja $f : A_1 \rightarrow A_2$ um homomorfismo de anéis. Definimos*

- O **núcleo** de f por $Ker(f) = \{x \in A_1; f(x) = 0\}$.
- A **imagem** de f por $Im(f) = \{f(x); x \in A_1\}$.

Exemplo 2.1.7. *Considere o anel $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ cujas operações \oplus e \otimes são definidas por:*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (0, bd).$$

e considere o homomorfismo f tal que $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, com $f(a, b) = b$. Então,

- Seja $(a, b) \in Ker(f)$. Então $f(a, b) = b = 0$. Logo, $Ker(f) = \{(a, 0); a \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $f(a, b) = b$, a imagem consiste em todos os valores possíveis de b , onde $b \in \mathbb{Z}$. Assim, $Im(f) = \{b \mid b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

Proposição 2.1.4. *Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então $Ker(f)$ é um ideal de A .*

Demonstração. De fato, veja que:

- Sejam $a, b \in \text{Ker}(f)$. Então $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0 - 0 = 0$, ou seja, $a - b \in \text{Ker}(f)$.
- Seja $x \in A$ e $a \in \text{Ker}(f)$. Então $f(a * x) = f(a) * f(x) = 0 * f(x) = 0$, portanto, $a * x \in \text{Ker}(f)$.

Assim, $\text{Ker}(f)$ é um ideal de A , como queríamos demonstrar. \square

Proposição 2.1.5. *Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então f é injetiva se, e somente se, $\text{Ker}(f) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f é injetiva. Note que $0 \subset \text{Ker}(f)$, uma vez que $f(0) = 0$. Resta mostrar que $\text{Ker}(f) \subset 0$.

Seja $a \in \text{Ker}(f)$. Assim, $f(a) = 0 = f(0)$, e como, por hipótese, f é injetiva, segue que $a = 0$. Logo, $\text{Ker}(f) \subset 0$, e por fim, $\text{Ker}(f) = 0$.

Reciprocamente Suponhamos agora que $\text{Ker}(f) = 0$, e sejam $a, b \in A$, tais que $f(a) = f(b)$. Então,

$$0 = f(a) - f(b) = f(a) + f(-b) = f(a - b).$$

Logo, $a - b \in \text{Ker}(f) = 0$, e daí, $a = b$. Portanto, f é injetiva. \square

Proposição 2.1.6. *Seja A um anel não nulo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- A é um corpo;
- Os únicos ideais em A são 0 e A ;
- Todo homomorfismo de A para um anel não nulo B é injetivo.

Demonstração. i) \Rightarrow ii). Suponha que $I \neq 0$ seja um ideal em A . Então, existe $a \in I$, $a \neq 0$, que é inversível, por A ser um corpo. Assim, pela Proposição 2.1.2, $I = A$.

ii) \Rightarrow iii). Seja $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis não nulo. Então, pela Proposição 2.1.3, $\text{Ker}(\phi)$ é um ideal em A . Portanto, por hipótese, $\text{Ker}(\phi) = 0$, ou $\text{Ker}(\phi) = A$, o que implica que ϕ é injetivo, pela Proposição 2.1.4.

iii) \Rightarrow i). Suponha que x seja um elemento em A que não é uma unidade. Então, $(x) \neq A$, implicando que $B = A/(x)$ não é o anel nulo. Seja $\phi : A \rightarrow B$ o homomorfismo natural de A para B , com $\text{Ker}(\phi) = (x)$. Pela hipótese, ϕ é injetivo, o que implica que $(x) = 0$ e, portanto, $x = 0$. \square

Definição 2.1.13. *Seja M um ideal de um anel comutativo A . Dizemos que M é um **ideal maximal** se $M \neq A$, e se os únicos ideais em A que contêm M são o próprio M e A .*

Exemplo 2.1.8. *Considere o anel \mathbb{Z} dos números inteiros. Todos os ideais de \mathbb{Z} são da forma $n\mathbb{Z}$, para $n \in \mathbb{Z}_+$. O ideal maximal desse anel corresponde à todos os ideais $p\mathbb{Z}$, onde p é um número primo.*

Proposição 2.1.7. *Seja A um anel comutativo com unidade, e M um ideal de A . Então M é um ideal maximal de A se, e somente se, A/M é um corpo.*

Demonstração. Suponhamos que M é maximal. Então, $M \neq A$ e, portanto, $1 + M \neq 0 + M$. Seja $x \in A$ tal que $x + M \neq 0 + M$. Então $x \notin M$.

Provemos que $x + M$ tem inverso em A/M . Consideremos os ideais $\langle x \rangle$ e $M + \langle x \rangle$. Como $M \subsetneq M + \langle x \rangle$, e M é maximal, temos $M + \langle x \rangle = A$. Logo, $1 \in M + \langle x \rangle$, e, portanto, existem $m \in M$ e $t \in A$ tais que $1 = m + xt$, onde

$$1 + M = (m + M) + (xt + M) = (x + M)(t + M)$$

pelo que o elemento não nulo $x + M$ de A/M tem inverso $t + M$. Como A/M é comutativo com unidade, então A/M é corpo.

Reciprocamente, suponhamos que A/M é corpo. Então $0 + M \neq 1 + M$, onde $1 \notin M$, e portanto, $M \neq A$. Tomemos um ideal I de A tal que $M \subsetneq I$. Seja $x \in I - M$. Então $x + M \neq 0 + M$ pelo que existe inverso de $x + M$, digamos $y + M$. Assim,

$$1 + M = (x + M)(y + M) = xy + M$$

onde $1 = xy + z$, para algum $z \in M$. Como $M \subseteq I$, temos $z \in I$ e, como $x \in I$, concluímos que $1 \in I$. Logo, $I = A$. Portanto M é maximal. \square

Definição 2.1.14. *O conjunto de todos os ideais maximais de um anel A é chamado **espectro maximal** de A , e denotado por $\text{Specm } A$.*

Definição 2.1.15. *Seja A um anel. Um ideal $I \subsetneq A$ chamado de **ideal primo** se $ab \in I$ implicar que $a \in I$ ou $b \in I$.*

Exemplo 2.1.9. *Seja \mathbb{Z} o anel dos números inteiros. Considere o ideal $2\mathbb{Z}$ formado por todos os múltiplos de 2 em \mathbb{Z} . Suponha que $ab \in 2\mathbb{Z}$, então ab é múltiplo de 2. Se $a \notin 2\mathbb{Z}$, então a não é múltiplo de 2, e portanto, b deve ser múltiplo de 2 para que $ab \in 2\mathbb{Z}$. Analogamente, Se $b \notin 2\mathbb{Z}$, então b não é múltiplo de 2, e portanto, a deve ser múltiplo de 2 para que $ab \in 2\mathbb{Z}$. Além disso, como $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ é ideal primo do anel.*

Definição 2.1.16. *O conjunto de todos os ideais primos de um anel A é chamado **espectro primo** de A , e denotado por $\text{Spec } A$.*

Proposição 2.1.8. *Todo ideal maximal de um anel comutativo é primo.*

Demonstração. Seja M um ideal maximal em um anel comutativo A . Da definição de ideal maximal, decorre diretamente que $M \neq A$. Assim, basta provar que, se a, b são elementos de A tais que $ab \in M$, então $a \in M$ ou $b \in M$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $a \notin M$ e consideremos o ideal $I = \langle a \rangle + M$. Observemos que, devido à proposição 2.1.2., $I \supset M$.

Como, porém, $a \in I$, pois $a = 1 * a + 0$, e $0 \in M$, e estamos supondo que $a \notin M$, então I contém propriamente M , e portanto, $I = A$. Isso implica que a unicidade de A pode ser escrita como $1 = ra + m$, em que r e m são convenientes elementos de A e M , respectivamente. Multiplicando-se os dois membros dessa igualdade por b , temos $b = r(ab) + bm$, e assim, temos que $b \in M$, posto que tanto ab como m são elementos de M , como queríamos demonstrar. \square

Definição 2.1.17. *Um anel A é chamado de **local** se possuir exatamente um ideal maximal, e **semilocal** se possuir pelo menos um e no máximo finitos ideais maximais. Se A é um anel local com ideal maximal M , então o corpo $k = A/M$ é chamado de **corpo residual** de A , e denotado por (A, M, k) .*

Exemplo 2.1.10. *Seja k um corpo. Então seu único ideal maximal é o ideal nulo. Logo, k é um anel local.*

Definição 2.1.18. *Seja A um anel comutativo. Chamamos de **A -álgebra** um anel B munido de um homomorfismo de anéis $f : A \rightarrow B$. Assim, o homomorfismo f deve ser considerado parte da estrutura da A -álgebra B .*

Exemplo 2.1.11. *O anel \mathbb{C} dos números complexos é uma \mathbb{R} -álgebra via o homomorfismo natural $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, que envia cada $r \in \mathbb{R}$ para $r + 0i$.*

Exemplo 2.1.12. *O anel de polinômios $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é uma A -álgebra via inclusão $A \rightarrow A[x_1, x_2, \dots, x_n]$.*

Definição 2.1.19. *Um **homomorfismo de A -álgebras** é um homomorfismo $f : B \rightarrow C$ de anéis, compatível com os homomorfismos base $g : A \rightarrow B$ e $h : A \rightarrow C$, isto é, tal que o seguinte diagrama comuta ($f \circ g = h$):*

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

Exemplo 2.1.13. *Considere $A = C = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$, onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, com $g(x) = x$; $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x) = x$ e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(a + bi) = a$.*

Note que o diagrama comuta, uma vez que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+0i) = x = h(x)$.

Exemplo 2.1.14. Seja A um anel comutativo. Consideremos as A -álgebras: $B = A[x]$, e $C = A[x, y]$, onde $g : A \rightarrow A[x]$, com $g(x) = x$; $h : A \rightarrow A[x, y]$, com $h(x) = x$, e $f : A[x] \rightarrow A[x, y]$, com $f(p(x)) = p(x)$.

Note que o diagrama comuta, uma vez que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = x = h(x)$.

Definição 2.1.20. Uma A -álgebra B é dita **finitamente gerada** se existe um subconjunto finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq B$ tal que $B = A[y_1, y_2, \dots, y_n]$.

Exemplo 2.1.15. Considere o anel de polinômios $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sobre um corpo k .

Note que qualquer elemento de $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ pode ser escrito como um polinômio da forma:

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} c_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

onde os coeficientes $c_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in k$ e os expoentes i_1, i_2, \dots, i_n pertencem a \mathbb{N} . Assim, o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ gera $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ como k -álgebra.

Portanto, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é uma k -álgebra finitamente gerada.

2.2 Teoria dos Módulos

Definição 2.2.1. Seja A um anel. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado da multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto am \end{aligned}$$

é chamado um **A -módulo** se, $\forall a, a_1, a_2 \in A$ e $\forall m, m_1, m_2 \in M$, as seguintes condições são satisfeitas:

- i) $(a_1 a_2)m = a_1(a_2 m)$;
- ii) $(a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m$;
- iii) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$.

Se A possui o elemento identidade 1, e:

- iv) $1m_1 = m_1$

então temos que A é um **A -módulo unitário**.

Exemplo 2.2.1. *Todo anel A é um A -módulo sobre si mesmo.*

Definição 2.2.2. *Seja A um anel e M um A -módulo. Um subgrupo N de M é um **A -submódulo** de M se é satisfeita a seguinte condição:*

$$an \in N; \forall a \in A \text{ e } \forall n \in N$$

Exemplo 2.2.2. *Um espaço vetorial V sobre um corpo K é um K -módulo. Os subespaços vetoriais V são submódulos de V .*

Definição 2.2.3. *Seja M e N A -módulos. Um **homomorfismo de A -módulos** (ou aplicação A -linear) $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de grupos abelianos que é compatível com as ações de A . Ou seja, se para todo $a \in A$ e para todo $x, y \in M$, tivermos:*

$$i) f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$ii) f(ax) = f(x)$$

Exemplo 2.2.3. *Considere $f : 2\mathbb{Z} \rightarrow 3\mathbb{Z}$, com $f(2x) = 3x, \forall x \in \mathbb{Z}$. Então f é um homomorfismo. De fato, $\forall 2x, 2x_1, 2x_2 \in 2\mathbb{Z}$, e $\forall a \in \mathbb{Z}$, temos:*

- $f(2x_1 + 2x_2) = f(2(x_1 + x_2)) = 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = f(2x_1) + f(2x_2);$
- $f(a(2x)) = f(2ax) = 3ax = a(3x) = af(2x).$

Definição 2.2.4. *Um A -módulo M é dito ser **finitamente gerado** se ele tem um conjunto finito de geradores.*

Exemplo 2.2.4. *Qualquer espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo k é um k -módulo finitamente gerado.*

Exemplo 2.2.5. *O módulo de polinômios em uma variável x sobre o anel A de grau n é um A -módulo finitamente gerado. Este módulo é gerado por $1, x, x^2, \dots, x^n$.*

Definição 2.2.5. *Dados dois A -módulos M e N , o conjunto de todos os homomorfismos $f : M \rightarrow N$ de A -módulos, é denotado por $\text{Hom}_A(M, N)$.*

A seguir, temos um caso particular da definição acima, quando temos os A -módulos $M = N$.

Definição 2.2.6. *Dado M um A -módulo, o conjunto de todos os homomorfismos de A -módulos $f : M \rightarrow M$ é denominado **endomorfismo**, e denotado por $\text{End}_A(M)$*

Definição 2.2.7. *Seja M um A -módulo.*

i) Dado um elemento $m \in M$, o anulador de m é o ideal

$$\text{Ann}_A(m) = \{f \in A; fm = 0\}$$

ii) O anulador de M é o ideal

$$\text{Ann}_A(M) = \{f \in A; fM = 0\} = \{f \in A; fm = 0, \forall m \in M\}.$$

Exemplo 2.2.6. *Seja I um ideal do anel A , e A/I um A -módulo. Então $\text{Ann}_A(A/I) = I$.*

Exemplo 2.2.7. *Sejam $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros módulo 6, e sejam $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ um A -módulo. Note que o anulador do módulo contém todos os $a \in A$ que anulam qualquer elemento de M . Daí, como $3 * m = 0$, para todo $m \in M$, então $\text{Ann}_A(M) = \bar{0}, \bar{3}$.*

Definição 2.2.8. *Se $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de A -módulos, então*

- *O núcleo de f é dado pelo conjunto*

$$\text{Ker}(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$$

- *A imagem de f é dado pelo conjunto*

$$\text{Im}(f) = f(M)$$

Exemplo 2.2.8. *Seja $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ e $N = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, e considere o homomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, definido por $f(x) = x \text{ mod } (6)$.*

- *O núcleo contém todos os $x \in \mathbb{Z}$ tais que $x \text{ mod } (6) = 0$, ou seja, os múltiplos de 6. Logo, $\text{Ker}(f) = 6\mathbb{Z}$.*
- *Como $f(x)$ representa o resto da divisão de x por 6, os possíveis valores de $f(x)$ são $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$. Ou seja, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.*

Definição 2.2.9. *Seja A um anel comutativo com unidade, e sejam U, V e W A -módulos. Uma função $f : U \times V \rightarrow W$ é chamada **emparelhamento bilinear** se satisfaz as seguintes condições:*

- i) $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v); \forall u \in U, v \in V, \lambda \in A$.*
- ii) $f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v); \forall u \in U, v \in V, \lambda \in A$.*
- iii) $f(u + w, v) = f(u, v) + f(w, v); \forall u, w \in U, v \in V$.*
- iv) $f(u, v + z) = f(u, v) + f(u, z); \forall u \in U, v, z \in V$.*

Exemplo 2.2.9. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K equipado com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$. Temos que o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um emparelhamento bilinear.*

3 Graduações e Sistemas Inversos de Macaulay

3.1 Graduações

Definição 3.1.1. *Seja G com conjunto não vazio munido de uma operação $(*)$. Dizemos que $(G, *)$ é um **monóide** se, para quaisquer $a, b, c \in G$, temos:*

- i) (Associatividade): $a * (b * c) = (a * b) * c$;*
- ii) (Elemento neutro): $a * e = a = e * a, \forall e \in G$.*

Para as próximas definições, iremos considerar $(G, +)$ como sendo um monóide comutativo.

Definição 3.1.2. *Um anel A é chamado de **G-graduado** se seu grupo aditivo $(A, +)$ admite uma decomposição como soma direta de subgrupos abelianos A_g*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

*satisfazendo $A_g \cdot A_h \subseteq A_{g+h}$, para todo $g, h \in G$. Um elemento x de A é dito **homogêneo** se $x \in A_g, \forall g \in G$.*

Exemplo 3.1.1. *Seja k um corpo. O anel de polinômios $k[x]$ é \mathbb{Z} -graduado, onde a graduação é dada pelo grau do polinômio. Ou seja, $k[x]_n$ é o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau n , juntamente com o polinômio zero. Por exemplo, $k[x]_0 = k$, $k[x]_1 = \{ax : a \in k\}$, $k[x]_2 = \{ax^2 : a \in k\}$, e assim por diante. A condição $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$ é satisfeita pois o produto de um polinômio de grau n por um polinômio de grau m é um polinômio de grau $n + m$.*

Definição 3.1.3. *Seja A um anel G -graduado. Um A -módulo M é chamado de **G-graduado** se $(M, +)$ admite uma decomposição como soma direta de subgrupos abelianos M_g*

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g$$

satisfazendo $A_g \cdot M_h \subseteq M_{g+h}$, para todo $g, h \in G$. Um elemento f de M é dito **homogêneo** se $f \in M_g, \forall g \in G$.

Definição 3.1.4. *Seja A um anel G -graduado. Um ideal $I \subseteq A$ é dito um **ideal homogêneo** se I é um submódulo graduado de A , ou seja, se $(I, +)$ admite a decomposição*

$$I = \bigoplus_{g \in G} (I \cap A_g)$$

Equivalentemente, I é um ideal homogêneo se é um ideal gerado por elementos homogêneos do anel G -graduado A .

Exemplo 3.1.2. *Seja $I = (x_1) \subseteq k[x_1, x_2]$. Note que I é homogêneo, uma vez que seu gerador x_1 é um polinômio homogêneo de grau 1. Como I é gerado por um único polinômio homogêneo, todos os seus elementos são da forma $f(x_1, x_2) \cdot x_1$, onde $f(x_1, x_2) \in k[x_1, x_2]$. Esses elementos são combinações lineares de x_1 , que preservam a homogeneidade, pois o produto de um polinômio homogêneo por outro polinômio resulta em um polinômio homogêneo (ou uma soma de polinômios homogêneos). Portanto, I é um ideal homogêneo.*

Exemplo 3.1.3. *Seja $I = (x^2, xy) \subseteq k[x, y]$. Note que I é homogêneo, pois seus geradores x^2 e xy são polinômios homogêneos de grau 2. Como I é gerado por polinômios homogêneos, todos os seus elementos são combinações lineares desses geradores, ou seja, têm a forma $a(x, y) \cdot x^2 + b(x, y) \cdot xy$, onde $a(x, y)$ e $b(x, y)$ são polinômios em $k[x, y]$. Essas combinações lineares preservam a homogeneidade, pois o produto de polinômios homogêneos resulta em polinômios homogêneos (ou somas de polinômios homogêneos). Assim, I é um ideal homogêneo.*

Definição 3.1.5. *Seja $\bigoplus_{d \geq 0} A_d$ um anel graduado. O ideal homogêneo de A*

$$A_+ = \bigoplus_{d > 0} A_d$$

*é chamado de **ideal irrelevante**.*

Proposição 3.1.1. *Seja A um anel \mathbb{N} -graduado, com $R_0 = k$, onde k é um corpo. Então o ideal irrelevante A_+ é o único ideal maximal homogêneo de A .*

Demonstração. Note que o componente de grau zero de A é $A_0 = k$, e como A_+ contém apenas elementos de grau maior que zero, ele não contém o elemento $1 \in A_0 = k$, portanto, $A_+ \neq A$.

Além disso, suponha que exista um ideal I tal que $A_+ \subsetneq I \subset A$. Como I contém propriamente A_+ , ele deve conter algum elemento $a \in A_0 = k$, onde $a \neq 0$. Como k é um corpo, a é invertível em k . Portanto, I contém um elemento invertível, o que implica que $I = A$. Assim, os únicos ideais que contêm A_+ , são o próprio A_+ e A , logo, A_+ é maximal.

Suponha agora outro ideal maximal homogêneo $M \neq A_+$. Como M é homogêneo, ele deve ser gerado por elementos homogêneos. Se M contivesse algum elemento de $A_0 = k$, então M conteria um elemento invertível, o que implicaria $M = A$, contradizendo o fato de que M é maximal. Logo, M deve estar contido em A_+ , mas como A_+ é maximal, então $M = A_+$, logo, A_+ é único. \square

Definição 3.1.6. Chamamos o ideal irrelevante A_+ com as condições da proposição acima de *ideal maximal irrelevante*.

Proposição 3.1.2. Seja A_+ um ideal maximal irrelevante de um anel A \mathbb{N} -graduado, com $R_0 = k$. Então A_+ é o único ideal maximal com graduação do anel A .

Demonstração. Pela proposição 3.1.1., já sabemos A_+ é um ideal maximal homogêneo de A . Resta-nos mostrar que a unicidade.

Suponha que exista outro ideal maximal homogêneo $M \neq A_+$. Como M é homogêneo, ele deve ser gerado por elementos homogêneos. Se M contivesse algum elemento de $A_0 = k$, então M conteria um elemento invertível, uma vez que k é um corpo, o que implicaria $M = A$, contradizendo o fato de que M é maximal. Portanto, M não pode conter elementos de A_0 , o que implica que M está contido em A_+ . No entanto, como A_+ é maximal, a única possibilidade é que $M = A_+$. Isto mostra que A_+ é o único ideal maximal homogêneo em A , logo, o único ideal maximal com graduação do anel A , como queríamos demonstrar. \square

3.2 Sistemas Inversos de Macaulay

Sendo k um corpo com característica zero¹, vamos considerar os dois anéis de polinômios a seguir:

$$R = k[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \text{ e } S = k[y_1, y_2, y_3, \dots, y_n].$$

Os polinômios de R representarão operadores diferenciais parciais que atuam sobre os polinômios em S . Essa ação é chamada de *ação de apolaridade de R em S* , e é definida pela configuração:

$$x_i \circ y_j = \frac{\partial}{\partial y_i}(y_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

¹ A característica do Anel $(R, +, *)$, escrevemos $\text{char}(R)$, é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 = n * x = x + \dots + x$ (n vezes), para todo $x \in R$. Caso não exista $n \in \mathbb{N}$ que satisfaça a equação temos $\text{char}(R) = 0$ e dizemos que R é um anel de característica nula ou zero.

Seja R_1 e S_1 os espaços dos polinômios de grau 1, nos anéis de polinômios R e S , respectivamente. Dessa forma, $\{x_i\}$ de R_1 pode ser considerado como o espaço dual de $\{y_i\}$ de S_1 . Portanto, R_1 pode ser pensado como o espaço dual de S_1 .

Além disso, podemos utilizar as propriedades padrões (e formais) da diferenciação para estender essa ação para:

$$\begin{aligned} R_i \times S_j &\longrightarrow S_{j-i} \\ (r_i, s_j) &\longmapsto r_i \times s_j = r_i \circ s_j \end{aligned}$$

Note que a ação de R em S transforma S em um R -módulo unitário, ou seja,

- i) $r \circ (s_1 + s_2) = r \circ s_1 + r \circ s_2$;
- ii) $(r_1 r_2) \circ s = r_1 \circ (r_2 s)$;
- iii) $(r_1 + r_2) \circ s = r_1 \circ s + r_2 \circ s$;
- iv) $1 \circ s = s$;

Exemplo 3.2.1. *Seja $F_2 = x_1^2 + x_1 x_2$ e $G_4 = y_1^4 + y_2^4$. Calcule $F_2 \circ G_4$.*

Solução: De fato, note que temos

$$\begin{aligned} F_2 \circ G_4 &= (x_1^2 + x_1 x_2) \circ (y_1^4 + y_2^4) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^2 (y_1^4 + y_2^4) + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (y_1^4 + y_2^4) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} (4y_1^3) + \frac{\partial}{\partial y_1} (4y_2^3) \\ &= 12y_1^2. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $F_2 \circ G_4 = 12y_1^2 \in S_2$.

Se tomarmos o monômio do anel R como $x^\alpha := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ (onde $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{Z}_+$), e o monômio do anel S como $y^\beta := y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}$ (onde $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $b_i \in \mathbb{Z}_+$), então temos que:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow a_i \leq b_i, \forall i \Leftrightarrow x^\alpha | x^\beta \in R.$$

Se x^α não divide x^β em R , escrevemos $\alpha \not\leq \beta$.

Exemplo 3.2.2. Seja $\alpha = (2, 1, 0)$ e $\beta = (4, 2, 1)$, e considere os monômios x^α e y^β dados por $x^\alpha = x_1^2 x_2^1$ e $y^\beta = y_1^4 y_2^2 y_3^1$. Vamos calcular $x_\alpha \circ y_\beta$ aplicando a ação de apolaridade.

$$\begin{aligned} x^\alpha \circ y^\beta &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (y_1^4 y_2^2 y_3) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (4y_1^3 y_2^2 y_3) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right) (12y_1^3 y_2 y_3) \\ &= 24y_1^3 y_2 y_3 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $x_\alpha \circ y_\beta = 24y_1^3 y_2 y_3$.

Proposição 3.2.1. Seja x^α e y^β definidas como acima, temos que

$$x^\alpha \circ y^\beta = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \not\leq \beta \\ \prod_{i=1}^n \left(\frac{(b_i)!}{(b_i - a_i)!} \right) y^{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leq \beta \end{cases}$$

Demonstração. **Caso 1:** A condição $\alpha \not\leq \beta$ implica que existe pelo menos um índice i tal que $a_i \not\leq b_i$. Para tal índice, ao aplicar a derivada parcial a_i -ésima em $y_i^{b_i}$, teremos:

$$\frac{\partial^{a_i}}{\partial y_i^{a_i}} (y_i^{b_i}) = 0, \quad \text{pois } a_i \not\leq b_i.$$

Logo, $x^\alpha \circ y^\beta = 0$.

Caso 2: Agora, suponha que $\alpha \leq \beta$, ou seja, $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Vamos analisar primeiramente o caso de uma única variável. Para um único par $(x_i^{a_i}, y_i^{b_i})$, o monômio $y_i^{b_i}$ é da forma:

$$y_i^{b_i} = y_i \cdot y_i \cdot \dots \cdot y_i \quad (b_i \text{ fatores}).$$

Ao derivar a_i -vezes ($a_i \leq b_i$), temos que a primeira, a segunda e a a_i -ésima derivada são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} (y_i^{b_i}) &= b_i y_i^{b_i-1}. \\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} (y_i^{b_i}) &= b_i(b_i - 1) y_i^{b_i-2}. \\ \frac{\partial^{a_i}}{\partial y_i^{a_i}} (y_i^{b_i}) &= \frac{b_i!}{(b_i - a_i)!} y_i^{b_i - a_i}. \end{aligned}$$

Agora, consideremos o caso geral, envolvendo múltiplas variáveis. Para os monômios $x^\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ e $y^\beta = y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}$, a ação $x^\alpha \circ y^\beta$ é separada por variável, ou seja:

$$x^\alpha \circ y^\beta = \prod_{i=1}^n (x_i^{a_i} \circ y_i^{b_i}).$$

Substituímos o resultado da derivada parcial em cada variável:

$$x^\alpha \circ y^\beta = \prod_{i=1}^n \frac{b_i!}{(b_i - a_i)!} y_i^{b_i - a_i}.$$

Podemos reescrever isso como:

$$x^\alpha \circ y^\beta = \left(\prod_{i=1}^n \frac{b_i!}{(b_i - a_i)!} \right) y^{\beta - \alpha},$$

onde $y^{\beta - \alpha} = y_1^{b_1 - a_1} y_2^{b_2 - a_2} \dots y_n^{b_n - a_n}$ é o monômio resultante. \square

Exemplo 3.2.3. Seja $\alpha = (2, 1, 0)$ e $\beta = (4, 2, 1)$, e considere os monômios x^α e y^β dados por $x^\alpha = x_1^2 x_2^1$ e $y^\beta = y_1^4 y_2^2 y_3^1$.

Vamos calcular a ação de apolaridade $x^\alpha \circ y^\beta$ com base na que temos acima:

$$\begin{aligned} x^\alpha \circ y^\beta &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{b_i!}{(b_i - a_i)!} \right) y^{\beta - \alpha} \\ &= \left(\frac{4!}{(4 - 2)!} \right) \left(\frac{2!}{(2 - 1)!} \right) \left(\frac{1!}{(1 - 0)!} \right) y_1^{4-2} y_2^{2-1} y_3^{1-0} \\ &= \left(\frac{4!}{2!} \right) \left(\frac{2!}{1!} \right) \left(\frac{1!}{1!} \right) y_1^2 y_2^1 y_3^1 \\ &= (12)(2)(1) y_1^2 y_2 y_3 \\ &= 24 y_1^2 y_2 y_3. \end{aligned}$$

Assim, temos que $x^\alpha \circ y^\beta = 24 y_1^2 y_2 y_3$ para os monômios dados.

Proposição 3.2.2. Sejam R_j e S_j o espaço dos polinômios homogêneos de grau j dos anéis R e S , respectivamente. A partir das propriedades mencionadas acima, a ação de apolaridade induz um emparelhamento k -bilinear.

$$R_j \times S_j \longrightarrow k$$

para cada $j = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. A ação de apolaridade de R sobre S define uma operação \circ que associa elementos de R_j e S_j a elementos do corpo k . Isto é, para quaisquer $r \in R_j$ e $s \in S_j$, temos: $r \circ s \in k$.

Essa propriedade decorre do fato de que r consiste em operadores diferenciais homogêneos de grau j , enquanto s é um polinômio homogêneo de grau j . Como a diferenciação reduz o grau dos monômios, a aplicação de r a s resulta em um escalar em k .

i) Para todo $\lambda \in k$, $r_1, r_2 \in R_j$ e $s \in S_j$, temos:

$$(\lambda r) \circ s = \lambda r \circ s = \lambda(r \circ s).$$

ii) Para todo $\lambda \in k$, $r \in R_j$ e $s \in S_j$, temos:

$$r \circ (\lambda s) = r \circ \lambda s = \lambda(r \circ s).$$

iii) Para todos $r_1, r_2 \in R_j$ e $s \in S_j$, temos:

$$(r_1 + r_2) \circ s = r_1 \circ s + r_2 \circ s.$$

iv) Para todos $r \in R_j$ e $s_1, s_2 \in S_j$, temos:

$$r \circ (s_1 + s_2) = r \circ s_1 + r \circ s_2.$$

logo, $R_j \times S_j \rightarrow k$ satisfaz todas as propriedades da definição 2.2.8., configurando-se como um emparelhamento k -bilinear. \square

Agora, sempre que temos um emparelhamento k -bilinear $V \times W \rightarrow k$ dado por $v \times w \rightarrow v \circ w$, tem-se duas transformações k -lineares induzidas, a saber:

$$\phi : V \rightarrow \text{Hom}_k(W, k) \quad \text{e} \quad \chi : W \rightarrow \text{Hom}_k(V, k),$$

onde

$$\phi(v) := \phi_v \quad \text{com} \quad \phi_v(w) := v \circ w.$$

e, analogamente,

$$\chi(w) := \chi_w \quad \text{com} \quad \chi_w(v) := v \circ w.$$

Definição 3.2.1. Um emparelhamento bilinear $V \times W \rightarrow k$ é chamado de não-singular (ou emparelhamento perfeito) se as transformações ϕ e χ são isomorfismos.

Proposição 3.2.3. O emparelhamento bilinear $V \times W \rightarrow k$ é não-singular se, e somente se para qualquer base do espaço vetorial $V \{v_1, \dots, v_n\}$, e para qualquer base do espaço vetorial $W \{w_1, \dots, w_n\}$, a matriz $b_{ij} = v_i \circ w_j$ é uma matriz inversível.

Demonstração. Suponha que o emparelhamento bilinear $V \times W \rightarrow k$ seja não-singular. Isso significa que a transformação linear $\phi : V \rightarrow \text{Hom}_k(W, k)$ definida por $\phi_v(w) = v \circ w$ é um isomorfismo.

Agora, para qualquer base v_1, \dots, v_n de V e w_1, \dots, w_n de W , podemos definir a matriz $B = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = v_i \circ w_j$. Esta é a matriz da transformação linear ϕ em relação às bases dadas, pois a aplicação de ϕ a um vetor base u_i gera um funcional linear $\phi(u_i) \in \text{Hom}_k(W, k)$, cuja ação sobre a base $\{w_1, \dots, w_n\}$ é descrita justamente pelos coeficientes b_{ij} . Uma vez que ϕ é um isomorfismo, a matriz B deve ser invertível. Portanto, a matriz b_{ij} é inversível para qualquer base de V e W .

Reciprocamente, Suponha que a matriz $[b_{ij}] = [v_i \circ w_j]$ é inversível para qualquer base de V e W .

Primeiramente, vamos considerar a transformação linear $\phi : V \rightarrow \text{Hom}_k(W, k)$ definida por $\phi_v(w) = v \circ w$. Para mostrar que ϕ é um isomorfismo, devemos demonstrar que é injetora e sobrejetora.

- *Injetora:* Suponha que $\phi(u_1) = \phi(u_2)$ para alguns vetores $u_1, u_2 \in V$. Isso significa que para todo $w \in W$, $u_1 \circ w = u_2 \circ w$.

Escolhendo a base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de W , temos que os coeficientes b_{ij} satisfazem

$$b_{i1} = u_1 \circ w_1, \quad b_{i2} = u_1 \circ w_2, \quad \dots, \quad b_{in} = u_1 \circ w_n,$$

e analogamente para u_2 . Como essas equações determinam as coordenadas de $\phi(u_1)$ e $\phi(u_2)$ na base $\{w_1, \dots, w_n\}$, a hipótese de que $\phi(u_1) = \phi(u_2)$ implica que as colunas correspondentes na matriz B são iguais. Como B é inversível, sua única solução é $u_1 = u_2$, provando a injetividade. Portanto, $u_1 = u_2$, o que demonstra que ϕ é injetora.

- *Sobrejetora:* Para qualquer transformação linear $T \in \text{Hom}_k(W, k)$, podemos encontrar um vetor $v \in V$ tal que $\phi(v) = T$ usando a matriz inversa da matriz B , onde $B_{ij} = v_i \circ w_j$. Isso demonstra que ϕ é sobrejetora.

Uma vez que ϕ é um isomorfismo, então o emparelhamento bilinear $V \times W \rightarrow k$ é não-singular. \square

Proposição 3.2.4. *O emparelhamento bilinear $R_d \times S_d \rightarrow k$, induzido pela ação de apolaridade de R em S é não singular.*

Demonstração. Sejam $\{r_1, \dots, r_n\}$ uma base de R_d e $\{s_1, \dots, s_n\}$ uma base de S_d . Vamos provar que a matriz $B = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = r_i \circ s_j$, é inversível.

Primeiramente, pela Proposição 3.2.1, a ação de apolaridade satisfaz a relação:

$$x^\alpha \circ y^\beta = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \not\leq \beta \\ \prod_{i=1}^n \left(\frac{(b_i)!}{(b_i - a_i)!} \right) y^{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leq \beta \end{cases}$$

Como $\{r_1, \dots, r_n\}$ é uma base de R_d , cada r_i pode ser representado por um monômio x_{α_i} , e similarmente, cada s_j corresponde a um monômio y_{β_j} . Para $i \neq j$, temos que $x_{\alpha_i} \circ y_{\beta_j} = 0$ porque $\alpha_i \not\leq \beta_j$ na ordenação de grau. Assim, a matriz B é diagonal.

Além disso, para $i = j$, temos que $x_{\alpha_i} \circ y_{\beta_i} \neq 0$, pois a ação de apolaridade preserva o grau e resulta em um coeficiente não nulo, conforme a fórmula acima. Isso implica que os elementos na diagonal de B são todos não nulos.

Uma matriz diagonal é invertível se e somente se todos os elementos da sua diagonal são não nulos. Como verificamos que $b_{ii} \neq 0$ para todo i , segue que B é invertível.

Portanto, pela proposição 3.2.3, o emparelhamento bilinear $R_d \times S_d \rightarrow k$, induzido pela ação de apolaridade, é não singular. \square

Definição 3.2.2. *Seja I um ideal homogêneo do anel R . O sistema inverso de I , denotado por I^{-1} , é o submódulo de R , consistindo de todos os elementos de S anulados por I com a ação de apolaridade.*

Proposição 3.2.5. *Suponha que $I = (F_1, \dots, F_t)$ e $G \in S$. Então, $G \in I^{-1}$ se, e somente se $F_1 \circ G = \dots = F_t \circ G = 0$.*

Demonstração. Suponha que $G \in I^{-1}$. Queremos mostrar que $F_1 \circ G = \dots = F_t \circ G = 0$.

Como $G \in I^{-1}$, temos que G é anulado por todos os elementos de I sob a ação de apolaridade. Isso significa que para cada elemento $F \in I$, temos $F \circ G = 0$ (por definição do sistema inverso I^{-1}). Portanto, temos que se $G \in I^{-1}$, então $F_1 \circ G = \dots = F_t \circ G = 0$.

Reciprocamente, suponha que $F_1 \circ G = \dots = F_t \circ G = 0$. Queremos mostrar que $G \in I^{-1}$.

Note que, como $I = (F_1, \dots, F_t)$, temos que, dado $F \in I$, existem $a_i \in R$, tais que

$$F = \sum_{i=1}^t a_i F_i$$

$$F \circ G = \left(\sum_{i=1}^t a_i F_i \right) \circ G = \sum_{i=1}^t a_i (F_i \circ G).$$

Agora, pela hipótese, temos $F_i \circ G = 0$ para cada $i = 1, \dots, t$. Assim, substituindo na equação acima, obtemos:

$$\sum_{i=1}^t a_i (F_i \circ G) = \sum_{i=1}^t a_i (0) = 0.$$

Portanto, $F \circ G = 0$ para todo $F \in I$. Logo, pela definição de I^{-1} , concluímos que $G \in I^{-1}$. \square

Exemplo 3.2.4. *Dado o ideal homogêneo $I = (x_1) \subseteq k[x_1, x_2]$, determine I^{-1} .*

Solução: Queremos determinar o sistema inverso de I , denotado por I^{-1} , e analisar sua estrutura em cada grau.

Pela definição do sistema inverso, temos que:

$$I^{-1} = \left\{ G \in S; \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) (G) = 0 \right\}$$

Agora, vamos analisar a estrutura de I^{-1} em cada grau.

Para o grau 1, considere um elemento $ay_1 + by_2 \in S_1$, onde a e b são coeficientes. Portanto, temos $\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) (ay_1 + by_2) = a$. E para que esse elemento pertença a I^{-1} , precisamos ter $a = 0$. Portanto, $(I^{-1})_1 = \langle y_2 \rangle$, ou seja, I^{-1} no grau 1 é gerado por y_2 .

Para o grau 2, considere um elemento $ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2 \in S_2$. O cálculo do operador de apolaridade nos dá $\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) (ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2) = 2ay_1 + by_2$. Para que esse elemento pertença a I^{-1} , a igualdade precisa ser satisfeita, ou seja, $2ay_1 + by_2 = 0$. Isso ocorre se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$. Portanto, $(I^{-1})_2 = \langle y_2^2 \rangle$, ou seja, I^{-1} no grau 2 é gerado por y_2^2 .

Continuando dessa forma, podemos verificar que $I^{-1} = k \oplus \langle y_2 \rangle \oplus \langle y_2^2 \rangle \oplus \langle y_2^3 \rangle \oplus \dots$. Ou seja, I^{-1} pode ser expresso como uma soma direta de submódulos gerados por potências de y_2 em cada grau.

Proposição 3.2.6. *Seja S um anel graduado e seja I^{-1} um sistema inverso associado a um ideal homogêneo $I \subset R$. Então, I^{-1} é um módulo graduado de S .*

Demonstração. Sabemos que S é um módulo graduado, ou seja, pode ser escrito como uma soma direta de seus componentes homogêneos:

$$S = \bigoplus_{l=0}^{\infty} S_l.$$

Definimos a graduação de I^{-1} como

$$(I^{-1})_l = \{ f \in S_l \mid f \circ i = 0, \forall i \in I \}.$$

Com isso, podemos escrever:

$$I^{-1} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} (I^{-1})_l.$$

Agora, precisamos mostrar que essa estrutura de graduação é compatível com a multiplicação em S , ou seja, que para todos $i, j \geq 0$, vale a inclusão:

$$S_i \cdot (I^{-1})_j \subset (I^{-1})_{i+j}.$$

Sejam $f \in S_i$ e $g \in (I^{-1})_j$, ou seja, g pertence a S_j e satisfaz $g \circ i = 0$ para todo $i \in I$. Consideremos o produto $f \cdot g$, que pertence a S_{i+j} por definição da graduação.

Para verificar que $f \cdot g \in (I^{-1})_{i+j}$, devemos mostrar que $(f \cdot g) \circ i = 0$ para todo $i \in I$. De fato, utilizando a propriedade associativa da ação de apolaridade:

$$(f \cdot g) \circ i = f \circ (g \circ i).$$

Como $g \in (I^{-1})_j$, temos que $g \circ i = 0$ para todo $i \in I$, logo,

$$f \circ (g \circ i) = f \circ 0 = 0.$$

Portanto, $f \cdot g \in (I^{-1})_{i+j}$, o que conclui a demonstração. □

4 Anéis Artinianos Gorenstein

4.1 Módulos e Anéis Artinianos

Definição 4.1.1. *Seja A um anel e M um A -módulo. Diz-se que M é um **A -módulo artiniiano** se toda cadeia descendente de submódulos de M :*

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

estabiliza. Isto é, existe $i \geq 1$ tal que $N_i = N_{i+1}$.

Definição 4.1.2. *Seja A um anel. A é dito ser um **anel artiniiano** se toda cadeia descendente de ideais de A :*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

estabiliza. Isto é, existe $i \geq 1$ tal que $I_i = I_{i+1}$.

Exemplo 4.1.1. *Seja K um corpo, então seus únicos ideais são $I = (0_K)$ e $K = (1_K)$. Assim, temos que $K \supset I$ é a única cadeia possível em K . Logo, K é artiniiano.*

Exemplo 4.1.2. *O anel $A = k[x, y]/(x^2, y^3, xy^2) = k \oplus kx \oplus ky \oplus kxy \oplus y^2$ é artiniiano. De fato, uma vez que a cadeia descendente de ideais:*

$$A \supseteq (x, y) \supseteq (xy, y^2) \supseteq (0)$$

estabiliza em (0) .

4.2 Função de Hilbert

Definição 4.2.1. *Seja A um anel \mathbb{N} -graduado. Então $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Assuma que A_0 é artiniiano e $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ um A -módulo graduado finitamente gerado. Definimos a **função de Hilbert de M** por*

$$H_M(n) = \dim_k M_n$$

Exemplo 4.2.1. *Seja k um corpo e $A = k[x_1, \dots, x_d]$ um anel de polinômios com graduação usual ¹. Como esse anel é graduado, ele é dividido em espaços vetoriais A_n , onde A_n representa o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau n . Cada A_n tem uma base formada pelos monômios de grau n nas variáveis x_1, \dots, x_d , e a quantidade de elementos dessa base equivale à dimensão de A_n como k -espaço vetorial.*

Para encontrar essa quantidade, precisamos contar o número de monômios $x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}$ de grau n , onde $k_1 + \dots + k_d = n$, $k_i \geq 0$. Cada monômio é identificado por uma combinação de expoentes (k_1, \dots, k_d) que somam n .

Podemos imaginar esse processo de contagem como uma sequência de pontos e barras, onde cada k_i é representado por uma quantidade de pontos, seguida por uma barra para indicar a mudança para a próxima variável. Por exemplo, para o monômio $x_1^3 x_2^2 x_4^5$ em quatro variáveis (com $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 0$, $k_4 = 5$, teríamos uma sequência visual de pontos e barras da seguinte forma:

•••/••//•••••

Para generalizar, o total de pontos será sempre $n = k_1 + \dots + k_d$, e o número de barras será $d - 1$, uma vez que há uma barra entre cada conjunto de pontos das variáveis. Contar essas sequências é o mesmo que contar as diferentes maneiras de colocar $d - 1$ barras numa sequência total de comprimento $n + d - 1$, somando pontos e barras. O número de maneiras de fazer isso é dado pela combinação $\binom{n + d - 1}{d - 1}$, que nos dá a quantidade de monômios de grau n . Logo,

$$H_A(n) = \binom{n + d - 1}{d - 1}, n \geq 0.$$

4.3 Anéis Gorenstein

Definição 4.3.1. *Seja (A, m, k) um anel artiniano local. O ideal $(0 : m)$, denotado por $\text{Soc}(A)$, é chamado de **socle** de A , e definido como*

$$\text{Soc}(A) = (0 : m) = \{x \in A : mx = 0\}$$

Exemplo 4.3.1. *Seja $A = k[x_0, x_1] / (x_0^2, x_1^2)$, então queremos encontrar $\text{Soc}(A) = (0 : m)$. Daí, temos que*

$$k[x_0, x_1] = k \oplus k[x_0] \oplus k[x_1] \oplus k[x_0x_1] \oplus k[x_0^2] \oplus k[x_1^2] \oplus k[x_0^2x_1^2] \oplus \dots$$

¹ Se k é um corpo e $A = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômio, existe uma \mathbb{N} -graduação em A chamada de **graduação usual**, onde A_d é um k -espaço vetorial com base dada pelos monômios de grau total d , ou seja, aqueles da forma $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, com $\sum \alpha_i = d$. Por exemplo, $x_1^2 + x_2x_3$ é homogêneo e possui graduação usual, enquanto $x_1^2 + x_2$, não.

Assim, podemos reescrever A como

$$A = k \oplus k[\bar{x}_0] \oplus k[\bar{x}_1] \oplus k[\bar{x}_0\bar{x}_1].$$

Vamos agora analisar cada um dos casos:

C1: Naturalmente, veja que $1 \notin \text{Soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\bar{x}_1, \bar{x}_0 \in (x_0, x_1)$, temos que $1 \cdot \bar{x}_0 = \bar{x}_0 \notin (0)$, analogamente, temos que $1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \notin (0)$. E portanto, $1 \notin \text{Soc}(A)$.

C2: Veja que $\bar{x}_0 \notin \text{Soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\bar{x}_1, \bar{x}_0 \in (x_0, x_1)$, temos que $\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_0 = \bar{x}_0^2 = 0 \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_0\bar{x}_1 \notin (0)$, e portanto, $\bar{x}_0 \notin \text{Soc}(A)$.

C3: Veja que $\bar{x}_1 \notin \text{Soc}(A)$. De fato, uma vez que para $\bar{x}_1, \bar{x}_0 \in (x_0, x_1)$, temos que $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1^2 = 0 \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_0\bar{x}_1 \notin (0)$, e portanto, $\bar{x}_1 \notin \text{Soc}(A)$.

C4: Veja que $\bar{x}_0\bar{x}_1 \in \text{Soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\bar{x}_1, \bar{x}_0 \in (x_0, x_1)$, temos que $\bar{x}_0\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1^2\bar{x}_0 = 0 \in (0)$, e também, $\bar{x}_0\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_0 = \bar{x}_0^2\bar{x}_1 = 0 \in (0)$. E portanto, $\bar{x}_0\bar{x}_1 \in \text{Soc}(A)$.

Desse modo, temos que $\text{Soc}(A) = (\bar{x}_0\bar{x}_1)$.

Exemplo 4.3.2. Seja $A = k[x_0, x_1] / (x_0^3, x_0x_1, x_1^2)$, então queremos encontrar $\text{Soc}(A) = (0 : m)$. Daí, temos que

$$k[x_0, x_1] = k \oplus k[x_0] \oplus k[x_1] \oplus k[x_0x_1] \oplus k[x_0^2] \oplus k[x_1^2] \oplus k[x_0^2x_1^2] \oplus \dots$$

Assim, podemos reescrever A como

$$A = k \oplus k[\bar{x}_0] \oplus k[\bar{x}_1] \oplus k[\bar{x}_0^2].$$

Vamos agora analisar cada um dos casos:

C1: Naturalmente, veja que $1 \notin \text{Soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\bar{x}_1, \bar{x}_0 \in (x_0, x_1)$, temos que $1 \cdot \bar{x}_0 = \bar{x}_0 \notin (0)$, analogamente, temos que $1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \notin (0)$. E portanto, $1 \notin \text{Soc}(A)$.

C2: Note que $\bar{x}_0 \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\bar{x}_1, \bar{x}_0 \in (x_0, x_1)$, temos que $\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1\bar{x}_0 = 0 \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_0 = \bar{x}_0^2 \notin (0)$. E portanto, $\bar{x}_0 \notin \text{Soc}(A)$.

C3: Note que $\overline{x_1} \in \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_1}, \overline{x_0} \in (x_0, x_1)$, temos que $\overline{x_0} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1 x_0} = 0 \in (0)$, e também, $\overline{x_1} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1^2} = 0 \in (0)$. E portanto, $\overline{x_1} \in \text{soc}(A)$.

C4: Note que $\overline{x_0^2} \in \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_1}, \overline{x_0} \in (x_0, x_1)$, temos que $\overline{x_0^2} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0^3} = 0 \in (0)$, e também, $\overline{x_1} \cdot \overline{x_0^2} = \overline{x_1 x_0 x_0} = 0 \in (0)$. E portanto, $\overline{x_0^2} \in \text{soc}(A)$.

Desse modo, temos que $\text{soc}(A) = (\overline{x_1}, \overline{x_0^2})$.

Exemplo 4.3.3. Seja $A = k[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2, x_1^2, x_2^2)$, então queremos encontrar $\text{Soc}(A) = (0 : m)$. Daí, temos que

$$k[x_0, x_1, x_2] = k \oplus k[x_0] \oplus k[x_1] \oplus k[x_2] \oplus k[x_0 x_1] \oplus k[x_0 x_2] \oplus k[x_1 x_2] \oplus k[x_0 x_1 x_2] \oplus \dots$$

Assim, podemos reescrever A como

$$A = k[x_0, x_1, x_2] = k \oplus k[\overline{x_0}] \oplus k[\overline{x_1}] \oplus k[\overline{x_2}] \oplus k[\overline{x_0 x_1}] \oplus k[\overline{x_0 x_2}] \oplus k[\overline{x_1 x_2}] \oplus k[\overline{x_0 x_1 x_2}]$$

Agora, vamos analisar cada um dos casos:

C1: Naturalmente, veja que $1 \notin \text{Soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $1 \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0} \notin (0)$, $1 \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1} \notin (0)$, e $1 \cdot \overline{x_2} = \overline{x_2} \notin (0)$. E portanto, $1 \notin \text{Soc}(A)$.

C2: Note que $\overline{x_0} \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_0} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0^2} \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\overline{x_0} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_0 x_1} \notin (0)$, e $\overline{x_0} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_0 x_2} \notin (0)$. E portanto, $\overline{x_0} \notin \text{Soc}(A)$.

C3: Note que $\overline{x_1} \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_1} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1^2} \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\overline{x_1} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0 x_1} \notin (0)$, e $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 x_2} \notin (0)$. E portanto, $\overline{x_1} \notin \text{Soc}(A)$.

C4: Note que $\overline{x_2} \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_2} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_2^2} \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\overline{x_2} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_2 x_0} \notin (0)$, e $\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_2 x_1} \notin (0)$. E portanto, $\overline{x_2} \notin \text{Soc}(A)$.

C5: Note que $\overline{x_0 x_1} \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_0 x_1} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0^2 x_1} \in (0)$, e $\overline{x_0 x_1} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_0 x_1^2} \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\overline{x_0 x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_0 x_1 x_2} \notin (0)$. E portanto, $\overline{x_0 x_1} \notin \text{Soc}(A)$.

C6: Note que $\overline{x_0 x_2} \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_0 x_2} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0^2 x_2} \in (0)$, e $\overline{x_0 x_2} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_0 x_2^2} \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\overline{x_0 x_2} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_0 x_1 x_2} \notin (0)$. E portanto, $\overline{x_0 x_2} \notin \text{Soc}(A)$.

C7: Note que $\overline{x_1x_2} \notin \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1^2x_2} \in (0)$, e $\overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1x_2^2} \in (0)$, mas, por outro lado, temos $\overline{x_0x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_0x_1x_2} \notin (0)$. E portanto, $\overline{x_1x_2} \notin \text{Soc}(A)$.

C8: Note que $\overline{x_0x_1x_2} \in \text{soc}(A)$. De fato, uma vez que, para $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in (x_0, x_1, x_2)$, temos que $\overline{x_0x_1x_2} \cdot \overline{x_0} = \overline{x_0^2x_1x_2} \in (0)$, e $\overline{x_0x_1x_2} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_0x_1^2x_2} \in (0)$, e $\overline{x_0x_1x_2} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_0x_1x_2^2} \in (0)$. E portanto, $\overline{x_0x_1x_2} \in \text{Soc}(A)$.

Desse modo, temos que $\text{Soc}(A) = (\overline{x_0x_1x_2})$.

Definição 4.3.2. *Seja*

$$A = k[x_0, \dots, x_n]/I = k \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_l, \text{ com } A_l \neq 0.$$

Então l é chamado de **grau do socle de A** .

Definição 4.3.3. *Seja A um anel artiniano graduado. Então A é chamado de **anel Gorenstein** se $\dim_k \text{Soc}(A) = 1$.*

Proposição 4.3.1. *Seja A um anel graduado artiniano com grau do socle l . A é gorenstein se, e somente se, $\text{Soc}(A) = A_l$, e $\dim(A_l) = 1$.*

Demonstração. Suponha que A seja Gorenstein. Por definição de anel Gorenstein, temos que $\dim_k \text{Soc}(A) = 1$. Como $A_l \subset \text{Soc}(A)$ e $A_l \neq 0$, segue que $\text{Soc}(A) = A_l$ e $\dim(A_l) = 1$.

Reciprocamente, suponha que $\text{Soc}(A) = A_l$ e $\dim(A_l) = 1$. Ora, se $\dim(A_l) = 1$, e temos que $\text{Soc}(A) = A_l$, então segue que $\dim \text{Soc}(A) = 1$, que é a definição de anel Gorenstein. \square

Exemplo 4.3.4. *Nos exemplos 4.3.1. e 4.3.3., temos que A é um anel gorenstein. Por outro lado, no exemplo 4.3.2., temos que A não é gorenstein.*

Proposição 4.3.2. *Se A é um anel artiniano com grau do socle l e $\dim_k A_l = 1$, então A é um anel Gorenstein se, e somente se, o emparelhamento $A_t \times A_{l-t} \rightarrow A_l$ é perfeito para todo $0 \leq t \leq l$.*

Demonstração. Suponha que A é um anel Gorenstein. Por definição, temos que $\dim_K \text{Soc}(A) = 1$, e como $A_l \subseteq \text{Soc}(A)$ e $\dim_K A_l = 1$, segue que $\text{Soc}(A) = A_l$. Queremos mostrar que o emparelhamento $A_t \times A_{l-t} \rightarrow A_l$ é perfeito. Para isso, considere um elemento $a \in A_t$ tal que $a \cdot b = 0$, $\forall b \in A_{l-t}$. Assim, temos que a é um elemento que sempre resulta em zero ao ser multiplicado por qualquer elemento de A_{l-t} .

Por outro lado, como A_l é o socle do anel, qualquer elemento em A_t que seja anulado pela multiplicação por todos os elementos de A_{l-t} deve pertencer a A_l . Mas como A_l tem

dimensão 1, e $t < l$, só pode ser que $a = 0$. Isso prova que a aplicação $\times A_{l-t}$ é injetora, garantindo que o emparelhamento é perfeito.

Reciprocamente, suponha que o emparelhamento $A_t \times A_{l-t} \rightarrow A_l$ é perfeito para todo $0 \leq t \leq l$. Em particular, tomando $t = l$, temos que $A_l \times A_0 \rightarrow A_l$ é perfeito. Como $A_0 = K$, segue que $\dim_K A_l = 1$. Mas isso implica que $\dim_K \text{Soc}(A) = 1$, logo, A é um anel Gorenstein, concluindo a demonstração. \square

Proposição 4.3.3. *A função de Hilbert de um anel artiniano Gorenstein A é simétrica. Ou seja, se l é o grau do socle de A , então $H_A(t) = H_A(l - t), \forall t$.*

Demonstração. Defina T de modo que

$$\begin{aligned} T : A_t &\longrightarrow A_{l-t}^* \\ a &\longmapsto \phi_a \end{aligned}$$

onde ϕ_a é definido como

$$\begin{aligned} \phi_a : A_{l-t} &\longrightarrow A_l \cong k \\ b &\longmapsto ab = k_0 \end{aligned}$$

Pela demonstração da proposição anterior, temos que $ab = 0$, então $\phi_a(b) = 0$, e $a = 0$. Assim, T é injetiva.

Analogamente, defina $Q : A_{l-t} \longrightarrow A_t^*$. Assim, temos que Q também será injetiva.

Se T e Q definidas anteriormente são injetivas, isso implica que $\dim A_t \leq \dim A_{l-t}^* = \dim A_{l-t}$ para T , e $\dim A_{l-t} \leq \dim A_t^* = \dim A_t$ para Q . Note que isto implica um isomorfismo, uma vez que $\dim A_t = \dim A_{l-t}$, e dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos.

Assim, temos que $\dim A_t = H_A(t) = H_A(l - t) = \dim A_{l-t}$. \square

Teorema 4.3.1. *Seja $Q = k[X_1, \dots, X_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre um corpo k . Considere I um ideal de Q e defina $A = Q/I$ como a álgebra quociente. Denote por \mathfrak{m} o ideal maximal (X_1, \dots, X_n) de Q . Então, existe um polinômio $F \in R = k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $I = \text{Ann}_Q(F)$ se, e somente se, A é Gorenstein.*

Demonstração. Suponha que $I = \text{Ann}_Q F$ para algum polinômio $F \in R$. Como F é anulado por operadores diferenciais de ordem suficientemente grande, $\text{Ann}_Q F$ contém m^l para l suficientemente grande. Note que, como estamos trabalhando com um corpo com característica zero, então existe um polinômio $G \in Q$ tal que, $G(X)F(x) \in k^\times$. Vamos mostrar que $I : m = I + k \cdot G$.

Como $G(X)F(x)$ é uma constante, então segue que

$$\partial_i G(\partial_1, \dots, \partial_n)F(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Isto mostra que $G \in I : m$. Agora, seja $a(X_1, \dots, X_n) \in I : m$ algum elemento. Por definição do ideal $I : m$, temos $X_i a(X_1, \dots, X_n) \in I = \text{Ann}_Q F$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, temos que

$$\partial_i a(\partial_1, \dots, \partial_n)F(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Daí temos que $a(X)F(x)$ é constante. Como já vimos, temos que $G(X)F(x)$ é uma constante diferente de zero, então temos que $a(X) - cG(X) \in \text{Ann}_Q F$, para toda constante $c \in k$. Assim, mostramos que $I : m = I + k \cdot G$. Em outras palavras, o k -espaço vetorial $(I : m)/I$ é unidimensional. Por isso, $A = Q/\text{Ann}_Q F$ é Gorenstein.

Reciprocamente, suponha que A é Gorenstein. Então o *socle* de A tem dimensão 1 sobre k , ou seja, $\dim_k(\text{Soc } A) = 1$. Isso implica que existe um único polinômio $F \in R$ cuja classe gera o *socle* de A .

Dessa forma, qualquer operador diferencial g pertencente a I deve anular F , ou seja, $I = \text{Ann}_Q(F)$.

Portanto, existe um polinômio $F \in R$ tal que o ideal I coincide com seu anulador, como queríamos demonstrar. \square

5 Propriedades de Lefschetz

5.1 Propriedade de Lefschetz Fraca

Definição 5.1.1. *Seja $A = \bigoplus_{i=0}^c A_i$, $A_c \neq 0$ uma álgebra graduada artiniana. Dizemos que A possui a propriedade de Lefschetz fraca se existe um elemento $L \in A_1$ tal que o mapa multiplicativo*

$$\times L : A_i \rightarrow A_{i+1}$$

tem posto máximo¹ para todo $0 \leq i \leq c-1$. Dizemos que $L \in A_1$ com esta propriedade é o elemento fraco de Lefschetz.

Proposição 5.1.1. *Suponha que A seja uma álgebra graduada artiniana sobre um corpo k , com graduação usual. Se A possui a propriedade fraca de Lefschetz, então A possui função de Hilbert unimodal².*

Demonstração. Seja m um ideal maximal de A . Como A possui graduação usual, m^i é gerado pela graduação A_i . Seja $j \geq 0$ o menor inteiro tal que $\dim_K A_j > \dim_K A_{j+1}$.

Como A possui a propriedade fraca de Lefschetz (WLP), existe um elemento $L \in A_1$ tal que $m^{j+1} = Lm^j$. Além disso, isso implica que $m^{i+1} = Lm^i$ para todo $i \geq j$. Portanto, o mapa $A_i \rightarrow A_{i+1}$ é sobrejetivo para $i \geq j$. Logo,

$$1 \leq \dim_K A_1 \leq \dim_K A_2 \leq \dots \leq \dim_K A_j \geq \dim_K A_{j+1} \geq \dots \geq \dim_K A_d.$$

Assim, $\dim_K A_i$, $1 \leq i \leq d$ é uma sequência unimodal. Portanto, a função de Hilbert de A é unimodal, concluindo a demonstração. \square

¹ Diremos que uma transformação T tem posto máximo se $\dim \text{Im}(T) = \min\{\dim \text{Dom}(T), \dim \text{CD}(T)\}$.

² Uma sequência finita de números inteiros $\{d_0, d_1, \dots, d_n\}$ é dita ser **unimodal** se existe um inteiro i , $0 \leq i \leq n$, tal que $d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_i \geq d_{i+1} \geq \dots \geq d_n$.

Exemplo 5.1.1. Neste exemplo, analisamos se uma álgebra graduada satisfaz a Propriedade Fraca de Lefschetz (WLP). Para isso, vamos considerar a álgebra

$$A = k[x, y]/(x^2, y^2)$$

e explorar diferentes graduações para x e y , visando investigar como os componentes graduados A_i são formados e verificar a validade da WLP em cada caso.

Caso 1: $\deg(x) = 1$ e $\deg(y) = 3$.

Aqui, os graus atribuídos a x e y são 1 e 3, respectivamente. Isso significa que os componentes graduados de A são formados com base nesses graus. Vamos analisar cada um.

- A_0 : Contém apenas o elemento 1.

$$A_0 = \langle 1 \rangle \implies \dim A_0 = 1$$

- A_1 : Contém elementos de grau 1. Como $\deg(x) = 1$, A_1 é gerado por x .

$$A_1 = \langle x \rangle \implies \dim A_1 = 1$$

- A_2 : Não contém elementos (pois $x^2 = 0$ e y tem grau 3, então não pode contribuir para A_2).

$$A_2 = 0 \implies \dim A_2 = 0$$

- A_3 : Contém elementos de grau 3. Como $\deg(y) = 3$, A_3 é gerado por y .

$$A_3 = \langle y \rangle \implies \dim A_3 = 1$$

- A_4 : Contém elementos de grau 4. Como x está em A_1 (grau 1) e y está em A_3 (grau 3), o produto xy tem grau 4.

$$A_4 = \langle xy \rangle \implies \dim A_4 = 1$$

Portanto, a função de Hilbert é $(1, 1, 0, 1, 1)$.

Para verificar a WLP, precisamos verificar se existe um elemento $L \in A_1$ tal que a multiplicação por L tem posto máximo entre A_i e A_{i+1} .

Escolhemos $L = x$. A multiplicação por x em A é tal que:

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	x	0	y	xy

Pois:

$$1 \cdot x = x \mid x \cdot x = 0 \mid 0 \cdot x = 0 \mid y \cdot x = xy \mid$$

Analisando a multiplicação em cada componente graduado:

- $L : A_0 \rightarrow A_1$, onde $1 \xrightarrow{x} x$: A multiplicação de 1 por x é x , logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_1 \rightarrow A_2$, onde $x \xrightarrow{x} x^2 = 0$: A multiplicação de x por x é zero ($x^2 = 0$), portanto $\dim \text{Im}(L) = 0 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_2 \rightarrow A_3$, onde $0 \xrightarrow{x} 0x = 0$: A multiplicação de zero por x é zero, então $\dim \text{Im}(L) = 0 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_3 \rightarrow A_4$, onde $y \xrightarrow{x} xy$: A multiplicação de y por x é xy , logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.

Portanto, em todos os casos, vemos que x cumpre a condição para ser elemento fraco de Lefschetz, então, podemos dizer que x é um elemento de Lefschetz fraco.

Caso 2: $\deg(x) = 1$ e $\deg(y) = 2$

Agora, analisaremos com graus 1 e 2 para x e y , respectivamente.

- A_0 : Contém apenas o elemento 1.

$$A_0 = \langle 1 \rangle \implies \dim A_0 = 1$$

- A_1 : Contém elementos de grau 1. Como $\deg(x) = 1$, A_1 é gerado por x .

$$A_1 = \langle x \rangle \implies \dim A_1 = 1$$

- A_2 : Contém elementos de grau 2. Como $\deg(y) = 2$, A_2 é gerado por y .

$$A_2 = \langle y \rangle \implies \dim A_2 = 1$$

- A_3 : Contém elementos de grau 3. Como x está em A_1 (grau 1) e y está em A_2 (grau 2), o produto xy tem grau 3.

$$A_3 = \langle xy \rangle \implies \dim A_3 = 1$$

Portanto, a função de Hilbert é $(1, 1, 1, 1)$.

Para verificar a WLP, precisamos verificar se existe um elemento $L \in A_1$ tal que a multiplicação por L tem posto máximo entre A_i e A_{i+1} .

Escolhemos $L = x$. A multiplicação por x em A é tal que:

$$\begin{array}{c|c|c|c} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 1 & x & y & xy \end{array}$$

Pois:

$$1 \cdot x = x \mid x \cdot x = 0 \mid y \cdot x = xy \mid$$

Analisando a multiplicação em cada componente graduado:

- $L : A_0 \rightarrow A_1$, onde $1 \xrightarrow{x} x$: A multiplicação de 1 por x é x , logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_1 \rightarrow A_2$, onde $x \xrightarrow{x} x^2 = 0$: A multiplicação de x por x é zero ($x^2 = 0$), portanto $\dim \text{Im}(L) = 0 \neq \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\} = 1$.
- $L : A_2 \rightarrow A_3$, onde $y \xrightarrow{x} xy$: A multiplicação de y por x é xy , logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.

Note que, no caso $L : A_1 \rightarrow A_2$, temos que $\dim \text{Im}(L) \neq \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$. Logo, x não cumpre a condição para ser Elemento Fraco de Lefschetz.

Caso 3: $\deg(x) = 1$ e $\deg(y) = 1$

Nesse caso, ambos os graus são iguais a 1.

- A_0 : Contém apenas o elemento 1.

$$A_0 = \langle 1 \rangle \implies \dim A_0 = 1$$

- A_1 : Contém elementos de grau 1. Como $\deg(x) = 1$ e $\deg(y) = 1$, A_1 é gerado por x e y .

$$A_1 = \langle x, y \rangle \implies \dim A_1 = 2$$

- A_2 : Contém elementos de grau 2. Como x e y estão em A_1 , o produto xy tem grau 2.

$$A_2 = \langle xy \rangle \implies \dim A_2 = 1$$

Portanto, a função de Hilbert é $(1, 2, 1)$.

Para verificar a WLP, precisamos verificar se existe um elemento $L \in A_1$ tal que a multiplicação por L tem posto completo entre A_i e A_{i+1} .

Escolhemos $L = x$. A multiplicação por x em A é:

$$\begin{array}{c|c|c} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline 1 & x, y & xy \end{array}$$

Pois:

$$1 \cdot x = x \mid x \cdot x = 0, y \cdot x = xy \mid$$

Analisando a multiplicação em cada componente graduado:

- $L : A_0 \rightarrow A_1$, onde $1 \xrightarrow{x} x$: A multiplicação de 1 por x é x , logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_1 \rightarrow A_2$, onde $x, y \xrightarrow{x} x^2, yx = yx$: A multiplicação de x, y por x é xy , portanto $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.

Portanto, em todos os casos, vemos que x cumpre a condição para ser elemento fraco de Lefschetz, então, podemos dizer que x é um elemento de Lefschetz fraco.

5.2 Propriedade de Lefschetz Forte

Definição 5.2.1. Seja $A = \bigoplus_{i=0}^c A_i$, $A_c \neq 0$, uma álgebra graduada artiniana. Dizemos que A possui a Propriedade Forte de Lefschetz se existe um elemento $L \in A_1$ tal que o mapa multiplicativo

$$\times L^d : A_i \rightarrow A_{i+d}$$

tem posto máximo para todo $0 \leq i \leq c-1$ e $1 \leq d \leq c-i$. Chamamos $L \in A_1$ com esta propriedade, de Elemento Forte de Lefschetz. Quando A possuir a Propriedade Forte de Lefschetz e $L \in A_1$ for o elemento forte de Lefschetz, diremos que o par (A, L) possui a Propriedade Forte de Lefschetz.

Proposição 5.2.1. Seja A uma K -álgebra graduada artiniana. Se A possui a Propriedade Forte de Lefschetz, então a função de Hilbert de A é unimodal.

Demonstração. Suponha que a função de Hilbert de A não seja unimodal. Então, existe um inteiro $k < l < m$ tal que

$$\dim_k A_k > \dim_k A_l < \dim_k A_m$$

Daí, o mapa multiplicativo $\times L^{m-k} : A_k \rightarrow A_m$ não pode ter posto máximo para qualquer elemento linear $L \in A$. Assim, A não pode ter a propriedade forte de lefschetz, o que é uma contradição com a hipótese. \square

Definição 5.2.2. *Seja $A = \bigoplus_{i=0}^d A_i$, $A_d \neq 0$, uma K -álgebra Artiniana graduada. A possui a propriedade de Lefschetz Forte Narrow Sense se existir um elemento $L \in A_1$ tal que o mapa multiplicativo*

$$\times L^{d-2i} : A_i \rightarrow A_{d-i}$$

seja bijetivo para $i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$.

Se uma K -álgebra Artiniana graduada A possui a Propriedade de Lefschetz Forte Narrow Sense, então o vetor de Hilbert de A é unimodal e simétrico, conforme o seguinte teorema mostra:

Teorema 5.2.1. *Seja $A = \bigoplus_{i=0}^d A_i$, $A_d \neq 0$, uma K -álgebra Artiniana graduada. A possui a SLP e o vetor de Hilbert é simétrico se e somente se A possuir a SLP narrow sense.*

Demonstração. Suponha que A possui a SLP e que seu vetor de Hilbert é simétrico.

Sabemos que a SLP garante que existe $L \in A_1$ tal que a multiplicação

$$\times L^{d-2i} : A_i \rightarrow A_{d-i}$$

é de posto máximo para todo i . Como o vetor de Hilbert de A é simétrico, temos

$$\dim_K A_i = \dim_K A_{d-i}.$$

Assim, o fato de $\times L^{d-2i}$ ter posto máximo implica que é uma bijeção, pois os espaços têm a mesma dimensão. Logo, A possui a SLP narrow sense.

Reciprocamente, Suponha que A possui a SLP no sentido estrito. Isso significa que para um certo elemento $L \in A_1$, o operador de multiplicação $\times L^{d-2i} : A_i \rightarrow A_{d-i}$ é um isomorfismo para todo i . Daí, segue que

$$\dim_K A_i = \dim_K A_{d-i}, \quad \forall i.$$

Essa simetria mostra que o vetor de Hilbert de A é simétrico, como queríamos demonstrar. \square

Corolário 5.2.1. *Seja $A = \bigoplus_{i=0}^d A_i$, $A_d \neq 0$ uma Álgebra Gorenstein Artiniana, com graduação usual. As duas condições SLP e SLP narrow sense são equivalentes.*

Demonstração. Como A é uma álgebra artiniana gorenstein com graduação usual, então o vetor de Hilbert é simétrico. Daí, pelo Teorema 5.2.1, A possui a SLP se, e somente se, A possui a SLP narrow sense. \square

Exemplo 5.2.1. Considere K como um corpo de qualquer característica. Seja $A = K[x, y]/(x^2, xy, y^a)$ com $a > 3$.

Vamos analisar os componentes graduados de A e verificar se a álgebra possui a Propriedade Forte de Lefschetz (SLP).

- A_0 : Contém apenas o elemento 1.

$$A_0 = \langle 1 \rangle \implies \dim A_0 = 1$$

- A_1 : Contém elementos de grau 1. Como $\deg(x) = 1$ e $\deg(y) = 1$, A_1 é gerado por x e y .

$$A_1 = \langle x, y \rangle \implies \dim A_1 = 2$$

- A_2 : Contém elementos de grau 2. Como $x^2 = 0$ e $xy = 0$, o único elemento de grau 2 é y^2 .

$$A_2 = \langle y^2 \rangle \implies \dim A_2 = 1$$

- A_i : Para $i \geq 3$, temos que $A_i = \langle y^i \rangle$.

$$A_i = \langle y^i \rangle \implies \dim A_i = 1 \quad \text{para } i \geq 3$$

Portanto, a função de Hilbert de A é $(1, 2, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a-2})$.

Para verificar a SLP, escolhemos $L = y + bx$. A multiplicação por L em A é tal que:

A_0	A_1	A_2	A_3	\dots
1	x, y	y^2	y^3	\dots

Analisando a multiplicação em cada componente graduado:

- $L : A_0 \rightarrow A_1$, onde $1 \xrightarrow{L} y + bx$: A multiplicação de 1 por $y + bx$ é $y + bx$, logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_1 \rightarrow A_2$, onde $x \xrightarrow{L} xy + bx^2 = 0$ e $y \xrightarrow{L} y^2 + bxy$: A multiplicação de x por $y + bx$ é zero e a multiplicação de y por $y + bx$ é y^2 , portanto $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.
- $L : A_2 \rightarrow A_3$, onde $y^2 \xrightarrow{L} y^3$: A multiplicação de y^2 por $y + bx$ é y^3 , logo, $\dim \text{Im}(L) = 1 = \min\{\dim \text{Dom}(L), \dim \text{CD}(L)\}$.

Portanto, $y + bx$ cumpre a condição para ser um Elemento de Lefschetz forte.

Além disso, note que a função de Hilbert de A não é simétrica. Portanto, pelo teorema 5.2.1, ela não possui SLP narrow sense.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, exploramos aspectos fundamentais da teoria dos anéis artinianos Gorenstein, dos sistemas inversos de Macaulay e das propriedades de Lefschetz, com o objetivo de compreender suas relações e aplicações na álgebra comutativa. Inicialmente, apresentamos as bases teóricas necessárias para a compreensão desses conceitos, enfatizando a construção dos sistemas inversos e suas conexões com a estrutura dos anéis Gorenstein. Posteriormente, discutimos as propriedades de Lefschetz, analisando suas implicações e relevância dentro da área.

Embora o presente trabalho tenha abordado aspectos essenciais desses temas, ainda há muitas questões em aberto que podem ser investigadas. Entre as possíveis direções futuras de pesquisa, destacam-se a exploração de novas caracterizações dos anéis Gorenstein em contextos mais gerais, a análise mais profunda das propriedades de Lefschetz, a investigação de conexões entre essas propriedades e problemas clássicos em álgebra, combinatória, topologia e geometria.

Além disso, este trabalho serviu como base para estudos mais avançados a nível de mestrado e doutorado na área de álgebra, contribuindo para a formação e aprofundamento de pesquisas futuras no campo. A expectativa é que os conceitos aqui discutidos possam ser ampliados e aplicados em contextos mais abrangentes, fomentando o desenvolvimento da área e incentivando novas descobertas matemáticas.

Por fim, esperamos que este trabalho contribua para o aprofundamento do conhecimento sobre esses temas e sirva como base para futuras pesquisas na área, incentivando novos estudos e aplicações dessas teorias em diferentes contextos matemáticos.

Referências

- 1 ALTAFI, Nasrin. Lefschetz properties and Jordan types of Artinian algebras. 2020. Tese de Doutorado. KTH Royal Institute of Technology.
- 2 ALTMAN, Allen; KLEIMAN, Steven. A term of commutative algebra. Worldwide Center of Mathematics, 2013.
- 3 ATIYAH, Michael. Introduction to commutative algebra. CRC Press, 2018.
- 4 CERMINARA, PhD Armando. Lefschetz Properties in Algebra, Geometry and Combinatorics.
- 5 DIAS, Thiago; GONDIM, Rodrigo. Waring problems and the Lefschetz properties. *Selecta Mathematica*, v. 29, n. 3, p. 32, 2023.
- 6 GONDIM, Rodrigo. On higher Hessians and the Lefschetz properties. *Journal of Algebra*, v. 489, p. 241-263, 2017.
- 7 GONDIM, Rodrigo; ZAPPALA, Giuseppe. On mixed Hessians and the Lefschetz properties. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 223, n. 10, p. 4268-4282, 2019.
- 8 HARIMA, Tadahito et al. Lefschetz properties. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- 9 MAENO, Toshiaki; WATANABE, Junzo. Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials. *Illinois Journal of Mathematics*, v. 53, n. 2, p. 591-603, 2009.
- 10 TENGAN, E.; FILHO, H. M. B. Algebra comutativa em quatro movimentos. 2015.