UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Christiana Granja do Nascimento

Sequência de Lucas e suas conexões com a Sequência de Fibonacci

RECIFE
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Christiana Granja do Nascimento

Sequência de Lucas e suas conexões com a Sequência de Fibonacci

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Orientadora: Profª. Drª. Thamires Santos Cruz

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Lorena Teles – CRB-4 1774

N244s Nascimento, Christiana Granja do.
Sequência de Lucas e suas conexões com a Sequência de Fibonacci / Christiana Granja do Nascimento. – Recife, 2025.
111 f.; il.

Orientador(a): Thamires Santos Cruz.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Fibonacci, Números de. 2. Sequências (Matemática). 3. Matemática (Ensino fundamental). I. Cruz, Thamires Santos, orient. II. Título

CDD 510

Christiana Granja do Nascimento

Sequência de Lucas e suas conexões com a Sequência de Fibonacci

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de licenciada.

Aprovado em: 14/03/2025

BANCA EXAMINADORA

____
Profª Drª Thamires Santos Cruz (Orientadora)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____
Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente (Examinador Interno 1)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____
Prof. Dr. Wagner Rodrigues Costa (Examinador Interno 2)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

À Deus e à minha família

Agradecimentos

À Deus, fonte de toda sabedoria e força, pela graça e pela luz que me guiaram durante esta jornada acadêmica e em todos os momentos da minha vida. Sem a Sua presença, nada disso teria sido possível.

Ao meu amado esposo, Aroldo, pela parceria incansável, pelo amor que aquece os dias difíceis e pelo apoio em cada etapa desta caminhada. Você foi meu porto seguro durante toda a escrita desta monografia e ao longo de toda a graduação.

Aos meus filhos de quatro patas, Zoe, Zury e Cookie, cuja alegria e companheirismo diários trouxeram leveza aos momentos de maior desafio.

Ao meu filho, José Miguel, que ainda está por vir, pelo amor que já transborda e pelo motivo extra para me dedicar e seguir em frente com ainda mais empenho e gratidão.

Ao meu pai, Christiano, por ser uma inspiração de dedicação e amor inabalável. Obrigada por me ensinar a persistir e sonhar, e por sua presença nas minhas apresentações ao longo da graduação, fortalecendo minha confiança e gratidão.

À minha avó, Maria das Graças, por estar presente em minha infância e adolescência, cercando-me de amor e ensinamentos. Sua força e determinação sempre foram um espelho para mim, e sou imensamente grata por seu carinho e por ser um exemplo de mulher guerreira em minha vida.

Ao meu avô, José Pedro, cuja força e persistência sempre foram admiráveis. Embora não esteja mais entre nós, seu legado permanece vivo em mim. Sou grata pela eterna ternura e afeto com que me cercou e por todo o amor que deixou em minha vida.

Aos meus familiares que, com apoio, carinho e amor, estiveram ao meu lado ao longo dessa jornada. Cada gesto de afeto e incentivo tornou essa caminhada mais leve e significativa. Sou profundamente grata por tê-los em minha vida.

À Profa. Thamires, pelos ensinamentos que tanto enriqueceram minha trajetória acadêmica e pessoal. Sua orientação foi essencial ao longo de todos esses anos, especialmente na construção desta monografia.

A cada um de vocês, minha mais profunda gratidão por serem parte fundamental desta conquista.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."
(Galileu Galilei)

Resumo

Este trabalho tem como foco o estudo das relações entre as sequências de Fibonacci e Lucas, com ênfase nas propriedades e aplicabilidades da sequência de Lucas no ensino básico. A sequência de Fibonacci, amplamente reconhecida por suas aplicações em diversos campos da matemática, possui conexão com a sequência de Lucas, que compartilha a mesma relação de recorrência, mas apresenta características que facilitam a compreensão de algumas identidades, tornando-a interessante para o aprendizado de sequências no contexto educacional. Neste contexto, é explorada a relação entre essas sequências e as raízes de uma equação quadrática, derivada do Teorema de Kepler. Além disso, esse estudo abrange também resultados históricos, como as fórmulas de Binet para ambas as sequências e identidades algébricas relacionadas. Mais ainda, são abordadas as potenciais contribuições da sequência de Lucas no desenvolvimento do raciocínio matemático e na introdução de conteúdos de sequências no ensino básico.

Palavras-chave: sequência de Lucas; sequência de Fibonacci; ensino básico.

Abstract

This work focuses on studying the relationships between the Fibonacci and Lucas sequences, emphasizing the properties and applications of the Lucas sequence in basic education. The Fibonacci sequence, widely recognized for its applications in various fields of mathematics, is connected to the Lucas sequence, which shares the same recurrence relation but exhibits characteristics that facilitate the understanding of certain identities, making it particularly interesting for learning sequences in an educational context. In this regard, the relationship between these sequences and the roots of a quadratic equation derived from Kepler's Theorem is explored. Additionally, this study covers historical results, such as Binet's formulas for both sequences and related algebraic identities. Furthermore, the potential contributions of the Lucas sequence to the development of mathematical reasoning and the introduction of sequence-related topics in basic education are also discussed.

Keywords: Lucas sequence; Fibonacci sequence; basic education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Leonardo Pisano 21
Figura 2 – François Lucas 25
Figura 3 – Visualização das Somas de Lucas 32
Figura 4 – Abraham De Moivre 52

Sumário

Introdução 19

1 EXPLORANDO AS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS DE FIBONACCI E LUCAS 21

1.1 O Passado da Sequência de Fibonacci 21

1.2 Conhecendo a Sequência de Fibonacci 22

1.2.1 Fibonacci no Mundo Negativo: A Extensão para Índices Inteiros 22

1.3 Números de Lucas: A Sequência Além de Fibonacci 25

1.4 Os Números de Lucas e a Infinitude das Sequências Generalizadas de Fibonacci 26

1.4.1 Fibonacci Sem Limites: Explorando Sua Generalização 27

1.4.2 Fibonacci e Suas Somatórias: Uma Abordagem Generalizada 29

2 FIBONACCI E LUCAS: CONEXÕES SURPREENDENTES E RESULTADOS NOTÁVEIS 35

2.1 Números de Lucas em Função dos de Fibonacci: Uma Ligação Recorrente 35

2.2 Os números de Fibonacci em função dos números de Lucas . 36

2.3 Uma Relação Direta entre F_n e L_n 37

2.4 A Identidade de Cassini para os Números de Lucas 39

3 A FÓRMULA POR TRÁS DA SEQUÊNCIA: EXPLORANDO BINET NA ÁLGEBRA DE FIBONACCI E LUCAS 41

3.1 Hora de Conhecer α e β 41

3.2 Potências Douradas: A Relação Entre α e β e as Sequências de Fibonacci e Lucas 43

3.3 Momento em que Binet Encontra Fibonacci e Lucas 48

3.4 A demonstração da Fórmula de Binet por Abraham De Moivre (1667-1754) 51

3.5 Binet em Ação: Explorando Identidades e Conjecturas nos Números de Fibonacci e Lucas 53

3.6 Demonstração e Verificação de Identidades Algébricas Utilizando as Fórmulas de Binet 54

3.7 Novas Perspectivas sobre às Somas de Fibonacci e de Lucas . 58

3.8 A Observação de Kepler sob uma Nova Perspectiva: Conexões entre Binet, Fibonacci e Lucas 66

4 A RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS, FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, F_n E L_n 71
4.1 Uma Abordagem Trigonométrica para a Fórmula de Binet e a Sequência de Fibonacci 81
4.2 Novas abordagens para cálculos e testes de F_n e L_n 83

5 ÁLGEBRA LINEAR E MATRIZES: UMA NOVA PERSPECTIVA SOBRE AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI E LUCAS 91
5.1 Matrizes associadas às sequências de Fibonacci e de Lucas . . 92
5.2 Identidades via matrizes 2×2 93
5.2.1 Identidades de Cassini para F_n e L_n 94
5.2.2 Os números de Lucas em função dos números de Fibonacci . 94
5.2.3 Os números de Fibonacci em função dos números de Lucas . 94
5.2.4 Adição, subtração e a diferença de quadrados de F_n e L_n . . . 95
5.2.5 Mais algumas identidades 96
5.2.6 Uma ponte direta entre F_n e L_n 97

6 APLICAÇÕES 99
6.1 Sequências Numéricas ao Longo da Escolarização 99
6.1.1 Estratégias para o Ensino das Sequências 100
6.1.2 Demonstrações e Experimentos em Sala de Aula 100
6.1.3 Relação com as Competências do Ensino Médio 101
6.2 Problemas e Questões de Concurso 101

Conclusão 105

REFERÊNCIAS 107

APÊNDICES 109

APÊNDICE A – SEQUÊNCIAS: ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES 111

Introdução

Uma das sequências mais notáveis no âmbito matemático é a de Fibonacci, sendo observada e analisada em diversos campos de estudos. Tal sequência é atribuída ao matemático Fibonacci, sendo este o escritor do Liber Abacci (1202) (21), o qual contém o Problema dos Coelhos, cuja resolução dá origem à Sequência. A importância de tal sequência é observada ainda, nos dias atuais, dado sua aplicabilidade em diversos ramos da matemática, sendo este um aspecto verificado facilmente desde 1963 (4), o ano de lançamento da revista The Fibonacci Quartely, cuja qual possui como temática exclusiva o estudo de tal sequência e sua matemática relacionada. Outra sequência pouco conhecida é a estudada por Édouard Lucas (1876) (25), que satisfaz a mesma relação de recorrência de Fibonacci, modificando apenas seus dois primeiros termos. Ao explorarmos algumas propriedades pertinentes a sequência de Lucas, podemos perceber que diversas identidades e relações são de forma mais fácil de ser compreendida do que as pertencentes à sequência de Fibonacci, sendo tal característica interessante de ser explorada durante o aprendizado de sequências no ensino básico.

A presente monografia tem como principal referência a dissertação de Mestrado de Bruno Astrolino e Silva (25) e tem como foco o estudo das relações entre os números de Lucas e os de Fibonacci. O trabalho prioriza a análise das propriedades da sequência de Lucas e sua aplicabilidade no ensino básico, destacando suas conexões com a sequência de Fibonacci e suas possíveis contribuições para a compreensão de conceitos matemáticos nesse nível de ensino.

Nesta monografia realiza-se, inicialmente, uma revisão bibliográfica que aborda as principais propriedades e definições pertinentes a ambas as sequências, fundamentando a análise com referências históricas e matemáticas relevantes. Posteriormente, explora-se a interconexão entre as sequências, utilizando fórmulas de Binet e identidades algébricas, para promover uma compreensão mais profunda dos resultados obtidos. A monografia conclui com a discussão das implicações educativas desses conceitos, destacando sua aplicabilidade no ensino básico.

1 Explorando as Sequências Numéricas de Fibonacci e Lucas

1.1 O Passado da Sequência de Fibonacci

Leonardo Pisano (ou Leonardo de Pisa) $(1170-1250)$, nascido em Pisa, na Toscana, foi um matemático renomado que adquiriu vastos conhecimentos matemáticos ao viajar por diversas regiões do Mediterrâneo, como Grécia, Síria, Egito, Sicília, Constantinopla e o sul da França. Ao retornar, aplicou esses saberes na produção de obras de destaque como Liber Abbaci (1202), Pratica Geometrae (1220) e Liber Quadratorum (1225) (21).

Figura 1 – Leonardo Pisano

Fonte: Google Imagens

O Pratica Geometrae apresenta uma compilação sobre geometria e trigonometria, estruturada com rigor euclidiano. Já o Liber Quadratorum foca na solução de problemas diofantinos quadráticos, incluindo um desafio matemático proposto no torneio organizado pelo imperador Frederico II, no qual Leonardo participou. A obra traz a solução detalhada do problema: encontrar um número racional tal que, ao somar ou subtrair cinco do quadrado desse número, o resultado seja o quadrado de outro número racional. A solução encontrada foi $\left(3\frac{5}{12}\right)$ (9).

Aos 30 anos, Leonardo publicou o Liber Abbaci (Livro do Ábaco), um tratado sobre cálculo aritmético, considerado o mais completo de sua época em Aritmética e Álgebra. Nele, Leonardo introduz os nove símbolos hindus (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) e o zero (chamado de Zéfiro pelos árabes), mostrando que qualquer número pode ser representado por eles. A obra também aborda problemas variados, como cálculo de lucros, conversão de moedas, somas de séries, movimento, e o Problema Chinês do Resto, cuja resolução envolve sistemas de congruências (25).

Entre os problemas do Liber Abbaci, destaca-se o "Problema dos Coelhos", que questiona quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir de um único casal em um ano, dadas as seguintes condições:

1. O primeiro mês inicia com apenas um casal;

2. Os casais começam a se reproduzir somente após o segundo mês de vida;

3. Não existe problemas genéticos oriundos do cruzamento consanguíneo;

4. Em todos os meses, cada casal fértil irá gerar um novo casal;

5. Os coelhos nunca falecem.

A análise do problema resulta na famosa Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...$$

A sequência foi nomeada no século XIX por Baldassare Boncompagni, editor das obras de Leonardo, que o apelidou de "Fibonacci", significando "filho de Bonaccio". Curiosamente, a fama de Fibonacci está associada a essa sequência, que surgiu naturalmente como solução de um problema, enquanto suas contribuições mais significativas demonstraram a superioridade do sistema numérico indo-arábico sobre o romano, além de avanços matemáticos de maior relevância (25).

1.2 Conhecendo a Sequência de Fibonacci

Definição 1.1. A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência em que cada termo, exceto os dois primeiros ($F_1 = F_2 = 1$), é a soma dos dois anteriores, podendo ser obtida através da seguinte relação de recorrência,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad \forall\, n \geq 2. \tag{1.1}$$

Observação 1.2. Por conveniência, define-se $F_0 = 0$, com justificativa apresentada posteriormente.

Embora Leonardo possa ter conhecido a relação de recorrência em 1202, seu primeiro registro documentado é atribuído a Albert Girard, mais de quatro séculos após o Liber Abbaci.

1.2.1 Fibonacci no Mundo Negativo: A Extensão para Índices Inteiros

A seguir será explicado como é possível estender os números F_n para qualquer inteiro n. A partir dos valores iniciais F_1 e F_2, os termos subsequentes são obtidos pela relação de recorrência (1.1).

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Reorganizando-se a fórmula acima, podemos reescrevê-la e interpretá-la do seguinte modo

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n. \tag{1.2}$$

Consequentemente, dados quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, fazendo-se uso de (1.2), pode-se obter o número de Fibonacci imediatamente anterior. O que explica o porquê de $F_0 = 0$, visto que

$$F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0.$$

Além disto, continuando-se do mesmo modo, conclui-se que

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1,\\
F_{-2} &= F_0 - F_{-1} = 0 - 1 = -1,\\
F_{-3} &= F_{-1} - F_{-2} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2,\\
F_{-4} &= F_{-2} - F_{-3} = -1 - 2 = -3,\\
F_{-5} &= F_{-3} - F_{-4} = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ou seja, os índices negativos de F_n (como $F_{-1}, F_{-2}, F_{-3}, F_{-4}, ...$) são definidos de forma que respeitam a relação de recorrência original, permitindo a extensão da sequência para todos os números inteiros n.

A tabela a seguir mostra os valores iniciais de F_n para índices inteiros.

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Observação 1.3. Vale destacar que a interpretação dos números de Fibonacci com índices negativos é semelhante à dos índices positivos: enquanto F_n com n positivo representa o n-ésimo número à direita de F_0, F_n com n negativo corresponde ao $|n|$-ésimo número à esquerda de F_0 (25).

Teorema 1.4 (Fórmula de Cassini)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$F_{n-1}F_{n+1} - {F_n}^2 = (-1)^n. \tag{1.3}$$

Prova: Novamente, tal prova será feita por intermédio do método da indução. Dado que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ nota-se que (1.3) é válida para $n = 1$. Supondo então que (1.3) seja válida para n,

$$\begin{aligned}
F_{(n+1)-1}F_{(n+1)+1} - {F_{n+1}}^2 &= F_nF_{n+2} - {F_{n+1}}^2, \\
&= F_nF_{n+2} - F_{n+1}(F_{n-1} + F_n), \\
&= F_n(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n-1}F_{n+1}, \\
&= {F_n}^2 - F_{n-1}F_{n+1}, \\
&= (-1)(F_{n-1}F_{n+1} - {F_n}^2), \\
&= (-1)(-1)^n, \\
&= (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Diante do exposto, (1.3) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.5 (Observação de Kepler)**.** *A razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$*, conhecida como a razão áurea. Em notação moderna,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi. \tag{1.4}$$

Prova: Suponha que o limite proposto exista e seja igual a L. Ao dividir-se ambos os lados da relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ por F_n $(n \geq 2)$, obtemos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Ao fazer $n \to \infty$ nesta última expressão e observando que deve-se ter $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to L$ e $\frac{F_n}{F_{n-1}} \to L$, verifica-se que

$$L = 1 + \frac{1}{L} \quad \text{ou ainda} \quad L^2 - L - 1 = 0.$$

Por fim, como o limite procurado é positivo, pode-se concluir que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, por essa ser a única raiz positiva da equação quadrática acima.

Um meio de mostrar que o limite (1.4) existe é notar que ao dividirmos ambos os lados da fórmula de Cassini por $F_{n-1}F_n$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n-1}F_{n+1} - {F_n}^2}{F_{n-1}F_n} &= \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n} \Leftrightarrow \\
\frac{F_{n-1}F_{n+1}}{F_{n-1}F_n} - \frac{{F_n}^2}{F_{n-1}F_n} &= \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n} \Leftrightarrow \\
\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} &= \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

uma sentença que facilita a verificação de que a sequência definida por $x_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$ trata-se de uma sequência contrativa já que $d(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2}d(x_n, x_{n-1})$. Portanto, x_n é uma sequência de Cauchy e deste modo convergente.

Uma outra maneira de provar a existência do limite (1.4) é observar que a expressão (1.5) pode ser usada para se estabelecer a igualdade entre as somas parciais de uma série telescópica e uma série alternada. Para tal basta que se tome ambos os lados de (1.5) de $n = 2$ até N obtendo

$$\frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{F_2}{F_1} = \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Ao fazer N tender ao infinito na igualdade acima, note que a série obtida à direita é convergente pelo teste de Leibniz para séries alternadas, portanto, temos que o limite (1.4), obtido à esquerda, é convergente.

Por fim, conforme (25) menciona convém também notar que as considerações anteriores também estabelecem uma interessante fórmula, cuja qual relaciona ϕ à soma alternada do inverso do produto de números consecutivos de Fibonacci,

$$\phi = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

1.3 Números de Lucas: A Sequência Além de Fibonacci

Figura 2 – François Lucas

Fonte: Google Imagens

François Édouard Anatole Lucas nasceu em Amiens, França, em abril de 1842. Em 1861, ingressou na École Normale Supérieure, concluindo os estudos em 1864. Após a graduação, foi assistente de Urbain Jean Joseph Le Verrier no Observatório de Paris até 1869. Durante a Guerra Franco-Prussiana (1870-1871), serviu como oficial de artilharia. Após a derrota, lecionou em várias instituições de Paris, como o Lycée de Moulins (1872-1876), o Lycée Saint-Louis (1876-1879) e o Lycée Charlemagne (1879-1890).

Lucas era um excelente professor, conhecido por estimular seus alunos com desafios matemáticos que exigiam grande criatividade. Além de lecionar, foi um matemático altamente produtivo, publicando mais de 180 artigos em jornais matemáticos internacionais sobre diversos temas. Suas principais contribuições foram na Teoria dos Números, área pela qual tinha grande interesse. Em 1876, estudou a sequência de Fibonacci e sua generalização, hoje chamada de sequência de Lucas. Nesse mesmo ano, apresentou uma versão do pequeno teorema de Fermat e desenvolveu testes de primalidade baseados em sequências recorrentes, determinando a primalidade do 12º número de Mersenne:

$$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727.$$

Tal número, composto por 39 algarismos, permanece sendo até hoje o maior primo encontrado sem o uso de computação. Entre seus mais de 70 artigos publicados entre 1876 e 1878, destacam-se: em 1877, Recherches Sur Plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise, sobre a sequência de Fibonacci, e em 1878, Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques, que aborda sequências recorrentes de segunda ordem e suas propriedades. Na introdução deste último artigo, Lucas explicou seu objetivo de estudar funções simétricas das raízes de uma equação quadrática e sua aplicação na teoria dos números primos.

Lucas também foi pioneiro na matemática recreativa, inventando o problema das torres de Hanói sob o pseudônimo N. Claus de Siam. Publicou quatro volumes de Récréations Mathématiques entre 1882 e 1894 e um de L'arithmétique Amusante em 1895. Sua obra mais importante, Théorie des Nombres, Tome Premier, foi publicada em 1891, com planos de um segundo volume.

Lucas faleceu de forma súbita aos 49 anos, em outubro de 1891, após ser atingido por um fragmento de porcelana durante um banquete. A infecção causada pelo ferimento levou à sua morte dias depois.

Observação 1.6. A história de Lucas só estaria completa ao considerar o impacto de seus resultados nos dias atuais. Isso inclui o trabalho de Derrick Henry Lehmer (1905-1991), que em 1927 e 1928 aprimorou o teste de primalidade de Lucas, baseado no pequeno Teorema de Fermat. Em 1930, Lehmer publicou "An Extended Theory of Lucas' Functions", que expandiu e refinou as ideias de Lucas, especialmente no que se refere à otimização do teste de primalidade para números de Mersenne. Como resultado dos trabalhos de Lucas e Lehmer, dos 35 maiores números primos conhecidos na era dos computadores eletrônicos, apenas dois não são primos de Mersenne. O maior primo conhecido, nos dias atuais, através do uso de computadores, foi descoberto por Luke Duran, trata-se do 52º primo de Mersenne, $2^{74207281} - 1$, anunciado em 12 de outubro de 2024, um número composto por mais de 41 milhões de dígitos (7).

1.4 Os Números de Lucas e a Infinitude das Sequências Generalizadas de Fibonacci

Neste momento, será apresentada uma generalização da sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci foi definida com valores iniciais específicos e uma relação de recorrência. No entanto, ao alterar os valores iniciais e manter a mesma relação de recorrência, podemos gerar diversas outras sequências semelhantes à de Fibonacci. Por exemplo, se o par de valores iniciais forem (2, 3) em vez de (1, 1), obtemos:

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_n{}^*$	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

A sequência acima é uma variação da sequência de Fibonacci, onde a indexação é alterada para $F_n^* = F_{n+2}$. Essa nova indexação implica que a sequência $\{F_n{}^*\}$ não seja de divisibilidade, pois $F_3{}^* \nmid F_6{}^*$.

Um exemplo mais interessante desse tipo de sequência é a sequência estudada por Édouard Lucas em 1876, cujos termos, em sua homenagem, são chamados números de Lucas, denotados modernamente por L_n. Ao escolher o par de valores iniciais (1,3) obtemos:

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Podemos gerar várias sequências semelhantes à de Fibonacci, alterando seus valores iniciais, sendo a sequência de Lucas a mais notável, por razões que serão explicadas a seguir. Uma delas é a simplicidade da fórmula de Binet para os números L_n em comparação com a de F_n, o que resulta em uma relação mais direta com o número áureo e suas potências. Além disso, será demonstrado como F_n e L_n estão estreitamente conectados por meio de várias propriedades e identidades.

Curiosamente, a sequência de Lucas nunca recebeu esse nome do próprio Lucas; ela foi inicialmente vista como uma extensão da sequência de Fibonacci. A associação do nome de Fibonacci à sequência popularizada por Lucas ocorreu devido a sua ampla difusão, embora Lucas, em seus primeiros escritos, tenha chamado a sequência de "série de Lamé"(25).

1.4.1 Fibonacci Sem Limites: Explorando Sua Generalização

Definição 1.7 (Sequência Generalizada de Fibonacci)**.** Uma sequência generalizada é qualquer sequência $\{x_n\}$, indexada nos inteiros, tal que $x_1 = u$ e $x_2 = v$, com $u, v \in \mathbb{R}$, para a qual

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}. \tag{1.6}$$

Neste modelo de sequência, basta que dois termos consecutivos sejam inteiros para que os termos subsequentes também o sejam. Em particular, se x_1 e x_2 forem inteiros, todos os termos seguintes também serão.

A seguir, apresentamos uma tabela com os primeiros termos de uma sequência generalizada de Fibonacci.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_n	$4v-7u$	$2u-v$	$3v-5u$	$2v-3u$	$2u-v$	$v-u$	u	v	$u+v$	$u+2v$	$2u+3v$

Por intermédio desta tabela podemos ver claramente a existência de uma relação entre os termos da sequência original de Fibonacci e os termos de uma sequência generalizada de Fibonacci qualquer, sendo este um fator motivacional para o teorema a seguir.

Teorema 1.8. *Dada $\{x_n\}$ uma sequência generalizada de Fibonacci, temos*

$$x_n = x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Prova: A demonstração será realizada através da segunda forma de indução inteira. Como $F_0 = 0$ e $F_{-1} = F_1 = 1$, observamos que (1.7) vale para $n = 1$

$$x_2F_{1-1} + x_1F_{1-2} = x_2F_0 + x_1F_{-1} = x_2 \cdot 0 + x_1 \cdot 1 = 0 + x_1 = x_1$$

e $n = 2$,

$$x_2F_{2-1} + x_1F_{2-2} = x_2F_1 + x_1F_0 = x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot 0 = x_2 + 0 = x_2.$$

Suponha que a identidade (1.7) seja válida para $n+1$ e para n, isto é,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_2F_n + x_1F_{n-1}, \\ x_n &= x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2}. \end{aligned}$$

Adicionando-se as equações anteriores,

$$\begin{aligned} x_{n+1} + x_n &= (x_2F_n + x_1F_{n-1}) + (x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2}) \Leftrightarrow \\ x_{n+2} &= x_2F_{n+1} + x_1F_n. \end{aligned}$$

E subtraindo-se as mesmas equações,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (x_2F_n + x_1F_{n-1}) - (x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2}) \Leftrightarrow \\ x_{n-1} &= x_2F_{n-2} + x_1F_{n-3}. \end{aligned}$$

Isto é, supondo que a fórmula (1.7) vale para n e para $n+1$, provamos que também é válida para $n+2$ e $n-1$, o que estabelece a veracidade de (1.7) para todo n inteiro.

Vale salientar que o Teorema 1.7 é um caso particular do próximo teorema, mais geral, cujo qual pode ser demonstrado da mesma forma.

Teorema 1.9. *Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ três sequências generalizadas de Fibonacci quaisquer. Caso, seja possível estabelecer $p, q \in \mathbb{R}$ de maneira que*

$$x_n = py_n + qz_n \tag{1.8}$$

seja válida para 2 valores consecutivos de n, então (1.8) é válida para $n \in \mathbb{Z}$.

Prova: Utilizando o teorema anterior é possível verificar que se x_n é o termo geral de uma sequência generalizada de Fibonacci então:

$$\begin{aligned} x_n &= x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2} \\ &= x_2F_{n-1} + x_1(F_n - F_{n-1}) \\ &= x_1F_n + (x_2 - x_1)F_{n-1} \end{aligned} \tag{1.9}$$

e,

$$x_n = \left(\frac{3x_1 - x_2}{2}\right)F_n + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)L_n. \tag{1.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x_1 - x_2}{2}\right)F_n + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)L_n &= \left(\frac{3x_1 - x_2}{2}\right)F_n + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)(3F_{n-1} + 1F_{n-2}) \\ &= \frac{(3x_1 - x_2)F_n}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(2F_{n-1} + F_{n-1} + F_{n-2})}{2} \\ &= \frac{(3x_1 - x_2)F_n}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(2F_{n-1} + F_n)}{2} \\ &= \frac{3x_1F_n - x_2F_n + (2x_2F_{n-1} - 2x_1F_{n-1} + x_2F_n - x_1F_n)}{2} \\ &= \frac{F_n(3x_1 - x_2 + x_2 - x_1) + F_{n-1}(2x_2 - 2x_1)}{2} \\ &= \frac{F_n(2x_1) + F_{n-1}(2x_2 - 2x_1)}{2} \\ &= x_1F_n + (x_2 - x_1)F_{n-1} \\ &= x_n. \end{aligned}$$

O motivo para a existência das fórmulas (1.8), (1.9) e (1.10) e muitas outras relacionadas é bem simples. É fácil ver que todas as possíveis sequências generalizadas de Fibonacci constituem um espaço vetorial real, isto porque a sequência composta apenas por zeros é claramente uma destas sequências e se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ forem sequências generalizadas de Fibonacci, as sequências $\{x_n + y_n\}$ e $\{\lambda x_n\}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ também serão. Ademais, tais identidades mostram que este espaço vetorial possui dimensão dois e, portanto, que quaisquer duas dessas sequências que não sejam múltiplas uma da outra formam uma base desse espaço, podendo ser utilizadas para produzir fórmulas semelhantes às vistas até o momento.

1.4.2 Fibonacci e Suas Somatórias: Uma Abordagem Generalizada

A seguir provaremos algumas identidades que envolvem somas de termos de uma sequência generalizada de Fibonacci.

Teorema 1.10. *Se $\{x_k\}$ uma sequência generalizada de Fibonacci, então:*

i)

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_{n+2} - x_1. \tag{1.11}$$

ii)

$$\sum_{k=0}^{n} x_{2k} = x_{2n+1} - x_{-1}. \tag{1.12}$$

iii)

$$\sum_{k=0}^{n} x_{2k+1} = x_{2n+2} - x_0. \tag{1.13}$$

iv)

$$\sum_{k=0}^{n} {x_k}^2 = x_n x_{n+1} - x_0 x_{-1}. \tag{1.14}$$

Prova: Para se provar (1.11), basta que se escreva a sequência de relações $x_k = x_{k+2} - x_{k+1}$ de $k = 0$ até n para em seguida adicioná-las:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_2 - x_1,\\
x_1 &= x_3 - x_2,\\
x_2 &= x_4 - x_3,\\
x_3 &= x_5 - x_4,\\
&\vdots\\
x_{n-3} &= x_{n-1} - x_{n-2}\\
x_{n-2} &= x_n - x_{n-1},\\
x_{n-1} &= x_{n+1} - x_n,\\
x_n &= x_{n+2} - x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro essas identidades, a maior parte dos termos do lado direito da igualdade se cancelam e obtém-se (1.11).

Para se obter (1.12) iremos utilizar a relação $x_{2k} = x_{2k+1} - x_{2k-1}$, somando de $k = 0$ até n

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_1 - x_{-1},\\
x_2 &= x_3 - x_1,\\
x_4 &= x_5 - x_3,\\
&\vdots\\
x_{2(n-2)} &= x_{2n-3} - x_{2n-5},\\
x_{2(n-1)} &= x_{2n-1} - x_{2n-3},\\
x_{2n} &= x_{2n+1} - x_{2n-1}.
\end{aligned}$$

Somando, membro a membro, as igualdades acima, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} x_{2k} = x_{2n+1} - x_{-1}.$$

Para se obter (1.13) iremos utilizar a relação $x_{2k+1} = x_{2k+2} - x_{2k}$, somando de $k = 0$ até n

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 - x_0,\\
x_3 &= x_4 - x_2,\\
x_5 &= x_6 - x_4,\\
&\vdots\\
x_{2(n-2)+1} &= x_{2n-2} - x_{2n-4},\\
x_{2(n-1)+1} &= x_{2n} - x_{2n-2},\\
x_{2n+1} &= x_{2n+2} - x_{2n}.
\end{aligned}$$

Somando, membro a membro, as igualdades acima, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} x_{2k+1} = x_{2n+2} - x_0.$$

Para se obter (1.14) iremos utilizar a relação ${x_k}^2 = x_k(x_{k+1} - x_{k-1})$ somando de $k = 0$ até n

$$\begin{aligned}
{x_0}^2 &= x_0x_1 - x_0x_{-1},\\
{x_1}^2 &= x_1x_2 - x_1x_0,\\
{x_2}^2 &= x_2x_3 - x_2x_1,\\
&\vdots\\
{x_{n-2}}^2 &= x_{n-2}x_{n-1} - x_{n-2}x_{n-3},\\
{x_{n-1}}^2 &= x_{n-1}x_n - x_{n-1}x_{n-2},\\
{x_n}^2 &= x_nx_{n+1} - x_nx_{n-1}.
\end{aligned}$$

Somando, membro a membro, as igualdades acima, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} {x_k}^2 = x_n x_{n+1} - x_0 x_{-1}.$$

As identidades (1.11) - (1.14) valem, particularmente, para $\{F_n\}$ e $\{L_n\}$. Fazendo $x_k = L_k$ nessas identidades, obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1, \tag{1.15}$$

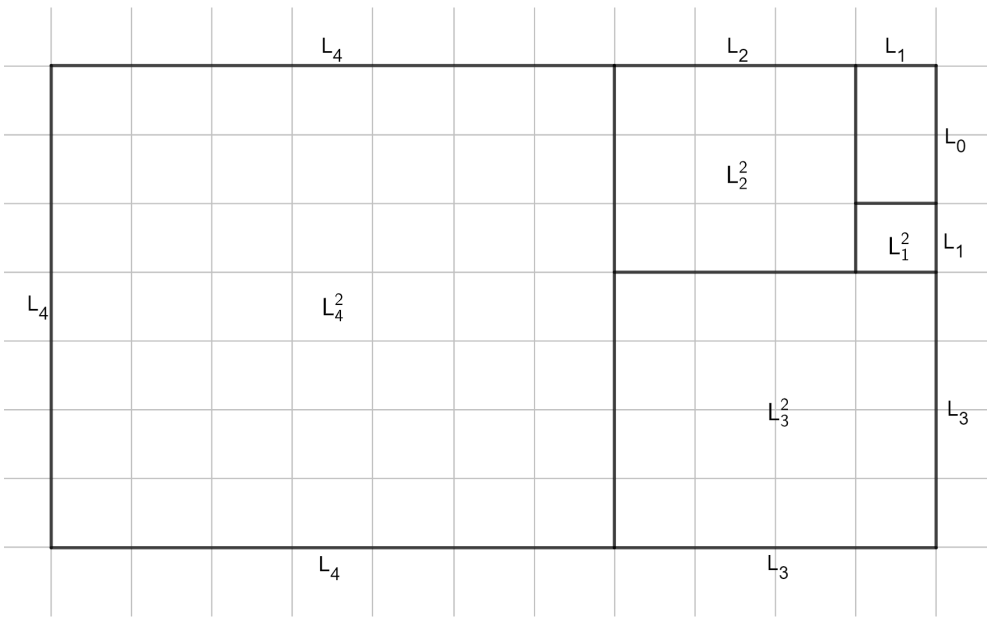
$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} + 1, \tag{1.16}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} = L_{2n+2} - 2, \tag{1.17}$$

$$\sum_{k=0}^{n} {L_k}^2 = L_n L_{n+1} + 2. \tag{1.18}$$

Podemos construir uma figura para auxiliar na visualização das somas acima, em casos particulares de n, para os números de Lucas.

Figura 3 – Visualização das Somas de Lucas



Fonte: Autoria Própria.

Para verificar (1.15) basta ver que a soma do lado direito com o lado superior é igual a soma do lado esquerdo com a parte inferior, em conjunto com a relação de recorrência. Já para obter (1.16) precisamos lembrar que os lados opostos de um retângulo são iguais, logo possui o mesmo comprimento bastando então igualá-los e utilizar novamente a relação de recorrência. Para obtermos (1.17) devemos nos atentar que o lado esquerdo é igual ao lado direito. Finalmente, para a obtenção de (1.18) basta notar que a área do retângulo maior é igual ao somatório das áreas dos retângulos e quadrados inscritos nele.

2 Fibonacci e Lucas: Conexões Surpreendentes e Resultados Notáveis

Os números de Fibonacci e os números de Lucas foram estudados por Édouard Lucas na segunda metade do século XIX. Um resumo de suas mais importantes descobertas sobre esses números pode ser encontrado em Recherches Sur Plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise de 1877. Tal texto em particular irá ser a base do exposto a seguir.

Para motivar e facilitar a visualização das fórmulas e propriedades que serão vistas mais adiante, a tabela a seguir será de grande utilidade.

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21
L_n	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Ao observarmos tal tabela, podemos inferir algumas fórmulas cujas quais relacionam os números de Fibonacci com os de Lucas, para em seguida, tais identidades serem provadas.

2.1 Números de Lucas em Função dos de Fibonacci: Uma Ligação Recorrente

A partir da tabela anterior, uma das relações mais imediatas que podem ser observadas, assim como, uma das mais importantes, é

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}. \tag{2.1}$$

Para demonstrar (2.1), tomaremos $x_n = L_n$ na relação (1.7), que é válida para $n \in \mathbb{Z}$, e usar os fatos $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$, obtendo-se

$$\begin{aligned} L_n &= L_2F_{n-1} + L_1F_{n-2}, \\ &= 3 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_{n-2}, \\ &= 2F_{n-1} + F_{n-1} + F_{n-2}, \\ &= F_n + 2F_{n-1}, \\ &= F_{n+1} + F_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

É fácil ver que, existem muitas outras formas de se reescrever (2.1) fazendo uso somente da relação de recorrência de Fibonacci, assim como

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1}, \\ &= F_{n+1} + F_n + F_{n-1} - F_n, \\ &= F_{n+2} - F_{n-2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A identidade (2.1) é particularmente relevante devido ao fato de recorrentemente ser vista naturalmente no estudo dos números de Fibonacci.

2.2 Os números de Fibonacci em função dos números de Lucas

Por razões evidentes, os números de Fibonacci e de Lucas, possuem identidades bem semelhantes, desta forma em vista do tópico anterior, é natural o interesse em investigar se a soma de L_{n+1} e L_{n-1} origina alguma relação de valia. Com o auxílio da tabela apresentada na pág. 31 pode-se pressupor que,

$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}. \tag{2.4}$$

Um meio de demonstrar essa última equação é somar (2.1) para $n+1$ e $n-1$ e fazer uso repetitivo da relação de recorrência como realizado abaixo,

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= F_{n+2} + F_n, \\ L_{n-1} &= F_n + F_{n-2}, \\ L_{n+1} + L_{n-1} &= 2F_n + F_{n+2} + F_{n-2} \\ &= 3F_n + F_{n+1} + F_{n-2} \\ &= 4F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= 5F_n. \end{aligned}$$

Utilizando a relação (2.1), obtém-se

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= F_{n+3} + F_{n+1}, \\ L_{n-2} &= F_{n-1} + F_{n-3}, \end{aligned}$$

e, consequentemente, podemos reescrever (2.4) como

$$\begin{aligned} 5F_n &= L_{n+1} + L_{n-1} \\ &= F_n + F_{n+2} + F_{n-2} + F_n \\ &= F_{n+1} - F_{n-1} + F_{n+2} + F_{n-1} - F_{n-3} + F_n \end{aligned}$$

$$= F_{n+3} - F_{n-1} + F_{n+1} - F_{n-3}$$
$$= L_{n+2} - L_{n-2}. \tag{2.5}$$

Ainda, é possível utilizar (2.1) e (2.4) unidas para construir novas identidades.

2.3 Uma Relação Direta entre F_n e L_n

Até o presente momento foram exibidas diversas equações cujas quais relacionavam de maneira indireta os números de Fibonacci e de Lucas. Neste instante, será exibida uma identidade fundamental, associando F_n e L_n.

Teorema 2.1. *Para todo n inteiro,*

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n. \tag{2.6}$$

Prova: Da identidade de Cassini (1.3) e da relação de recorrência (1.1) são válidas as equações $F_{n+1}F_{n-1} = {F_n}^2 + (-1)^n$ e $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$. Sendo assim, elevando a equação $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} + F_{n-1}^2, \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})^2 + 4F_{n+1}F_{n-1}, \\ &= F_n^2 + 4(F_n^2 + (-1)^n), \\ &= 5F_n^2 + 4(-1)^n. \end{aligned}$$

Por intermédio da identidade (2.6) podemos ver que as equações diofantinas $5x^2 \pm 4 = y^2$ detém infinitas soluções. Além do mais, será demonstrado posteriormente que os únicos resultados inteiros (x, y) dessas fórmulas são obtidos pelos pares $(x, y) = (F_n, L_n)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Tal fato, juntamente com (2.6) e a identidade equivalente

$$5L_n^2 - 20(-1)^n = (5F_n)^2, \tag{2.7}$$

torna possível que sejam apresentados os próximos testes teóricos determinísticos para os termos de Fibonacci e de Lucas:

Teste 2.2. Se $x \in \mathbb{N}$, então:

a) x é um número de Fibonacci se e somente se $(5x^2 + 4)$ ou $(5x^2 - 4)$ é quadrado perfeito.

b) x é um número de Lucas se e somente se $(5x^2 + 20)$ ou $(5x^2 - 20)$ é quadrado perfeito.

Prova: Tal demonstração será realizada por intermédio da redução ao absurdo. Como (2.6) é válida, falta mostrar que se x e y são tais que

$$5x^2 \pm 4 = y^2, \tag{2.8}$$

então $x = F_n$ e $y = L_n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. A prova de tais testes é oriunda da obra de Ferguson (25).

Suponha que x seja o menor inteiro positivo, cujo qual não é um número de Fibonacci e que satisfaça a relação proposta. Sendo assim, $x \geq 4$, já que $1, 2$ e 3 são números de Fibonacci, implicando portanto claramente que $2x \leq y < 3x$. Ademais, é possível verificar que x e y tem mesma paridade logo, $y = x + 2t$ para algum $t < x$. Substituindo y em $5x^2 \pm 4 = y^2$ temos

$$\begin{aligned}
5x^2 \pm 4 &= (x+2t)^2 \\
5x^2 \pm 4 &= x^2 + 4xt + 4t^2 \\
5x^2 - x^2 - 4tx - 4t^2 \pm 4 &= 0 \\
4x^2 - 4tx - 4t^2 \pm 4 &= 0.
\end{aligned}$$

Solucionando para $2x$,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-4t) \pm \sqrt{(-4t)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4t^2 \pm 4)}}{2 \cdot 4} \\
&= \frac{4t \pm \sqrt{16t^2 - 16 \cdot (-4t^2 \pm 4)}}{8} \\
&= \frac{4t \pm \sqrt{16t^2 + 64t^2 \mp 64)}}{8} \\
&= \frac{4t \pm \sqrt{80t^2 \mp 64)}}{8} \\
&= \frac{4t \pm 4\sqrt{5t^2 \mp 4)}}{8} \\
&= \frac{t \pm \sqrt{5t^2 \mp 4)}}{2} \\
\Rightarrow 2x &= t \pm \sqrt{5t^2 \pm 4},
\end{aligned}$$

de maneira que $5t^2 \pm 4 = s^2$ para $t, s \in \mathbb{Z}$. Como $t < x$, t deve ser um número de Fibonacci F_n e s o número de Lucas L_n correspondente. Assim,

$$\begin{aligned}
s &= \pm\sqrt{5t^2 \pm 4} \\
2x &= F_n + L_n,
\end{aligned}$$

visto que x é positivo e vale que $L_n \geq F_n$, para $n \geq 1$. Observe que, por (1.17)

$$F_n + L_n = F_n + F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n+1}.$$

Consequentemente, se t é um número de Fibonacci, x também será. Portanto, um absurdo.

Sabendo-se que (2.7) é válida, resta provar a recíproca do item b. Pelo item a, se $5x^2 \pm 4 = y^2$ então $x = F_n$ e $y = L_n$, para algum n inteiro. Multiplicando (2.8) por 5, obtemos

$$\begin{aligned} 25x^2 \pm 20 &= 5y^2 \Leftrightarrow \\ 25x^2 &= 5y^2 \pm 20 \Leftrightarrow \\ 5{L_n}^2 \pm 20 &= (5x)^2. \end{aligned}$$

A equação (2.6) também pode ser usada no cálculo do máximo divisor comum entre F_n e L_n. Note que, como F_1,L_1,F_2 e L_2 são ímpares, as sequências de Fibonacci e de Lucas tem a mesma tabela de paridade:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n *e* L_n	par	ímpar	ímpar	par	ímpar	ímpar	par	ímpar	ímpar

Diante disto, suponha que $d = \text{mdc}(F_n,\, L_n)$. Assim, de (2.6), observa-se que $d^2|4$ e, por conseguinte, $mdc(F_n, L_n) \leq 2$. Tal fato, juntamente à tabela de paridade acima, permite inferirmos que

$$mdc(F_n, L_n) = \begin{cases} 2, & \text{se 3 divide } n \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.9}$$

2.4 A Identidade de Cassini para os Números de Lucas

Como já esperado, existe para os números de Lucas uma identidade similar à de Cassini dos números de Fibonacci, adiante, será apresentada uma demonstração incomum desta identidade, utilizando uma ideia encontrada em Basin e Hogatt; e Bicknell e Hoggatt (25).

Teorema 2.3. *Para todo n inteiro,*

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n. \tag{2.10}$$

Prova: Utilizando-se o método da indução matemática, note que como

$$L_{-1}L_1 - L_0^2 = -1 \cdot 1 - (-2)^2 = -5,$$

temos que, para o caso $n = 0$, a base da indução, a fórmula (2.10) é válida. Agora, considere o seguinte sistema linear, composto por duas equações e duas incógnitas, cujas soluções são claramente dadas por $x_0 = y_0 = 1$.

$$\begin{cases} xL_{n+1} + yL_n = L_{n+2}. \\ xL_n + yL_{n-1} = L_{n+1}. \end{cases}$$

Fazendo-se uso da regra de Cramer para o cálculo dos resultados desse sistema linear, pode-se calcular o valor de y_0 como uma divisão dos seguintes determinantes,

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_{n+2} \\ L_n & L_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2}}{L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2} = 1 \end{aligned}$$

isto é,

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = (-1)(L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2). \tag{2.11}$$

Por hipótese de indução, temos

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n.$$

Por transitividade,

$$\begin{aligned} (-1)(L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2) = -5(-1)^n \Leftrightarrow \\ L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2 = -5(-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

ou seja, (2.10) é válida para $n+1$.

Para demonstrar o caso $n-1$, observe que

$$\begin{aligned} L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 &= (-1)(L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2) \Leftrightarrow \\ -5(-1)^n &= (-1)(L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2) \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_n(L_{n+1} + L_n) - L_{n+1}^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_n L_{n+1} + L_n^2 - L_{n+1}^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_{n+1}(L_n - L_{n+1}) + L_n^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_{n+1}(-L_{n-1}) + L_n^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= (L_n + L_{n-1})(-L_{n-1}) + L_n^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= -L_n L_{n-1} - L_{n-1}^2 + L_n^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_n(L_n - L_{n-1}) - L_{n-1}^2 \Leftrightarrow \\ -5(-1)^{n-1} &= L_n L_{n-2} - L_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Portanto, (2.10) vale para $n \in \mathbb{Z}$.

3 A Fórmula por Trás da Sequência: Explorando Binet na Álgebra de Fibonacci e Lucas

Neste momento, iremos explorar um pouco da álgebra que relaciona F_n e L_n, e como estes estão intimamente relacionados a uma equação quadrática.

3.1 Hora de Conhecer α e β

Anteriormente, vimos que a razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro, resultando em uma equação do 2º grau, a saber

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{3.1}$$

Denotando-se as raízes dessa equação por α e β, temos

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{3.2}$$

E, consequentemente,

$$\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4}\right) \\
&= \left(\frac{1^2 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - (\sqrt{5})^2}{4}\right) \\
&= \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

As relações obtidas acima serão extremamente úteis no decorrer deste estudo. A seguir veremos mais algumas relações envolvendo α e β dentre elas

$$\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}, \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{[(1^2 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2] + 4}{2(1+\sqrt{5})} \\
&= \frac{[(1 + 2\sqrt{5} + 5] + 4}{2(1+\sqrt{5})} \\
&= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} \\
&= \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}\right) \\
&= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \\
&= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) \\
&= \left(\frac{-4\sqrt{5}}{-4}\right) = \sqrt{5},
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta + \frac{1}{\beta} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \\
&= \frac{[(1-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})] + [2 \cdot 2]}{2(1-\sqrt{5})} \\
&= \frac{[(1^2 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2] + [4]}{2(1-\sqrt{5})} \\
&= \frac{[(1 - 2\sqrt{5} + 5] + 4}{2(1-\sqrt{5})} \\
&= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{2(1-\sqrt{5})} \\
&= \left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{2(1-\sqrt{5})}\right) \\
&= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) \\
&= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \\
&= \left(\frac{5 + 5\sqrt{5} - \sqrt{5} - 5}{1-5}\right) \\
&= \left(\frac{4\sqrt{5}}{-4}\right) = -\sqrt{5}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Note que, (3.1) implica que $x = 1 + \frac{1}{x}$ e $x = \sqrt{1+x}$, portanto

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}\ . \tag{3.8}$$

Vale salientar que como α e β são raízes de (3.1), temos

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \qquad \text{e} \qquad \beta^2 = \beta + 1.$$

Uma consequência imediata dessas equações é que multiplicando-se respectivamente por α^{n-1} e β^{n-1}, onde n é inteiro, obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cdot \alpha^{n-1} &= (\alpha + 1) \cdot \alpha^{n-1} \Leftrightarrow \\ \alpha^{2+n-1} &= \alpha^{n-1+1} + \alpha^{n-1} \Leftrightarrow \\ \alpha^{n+1} &= \alpha^n + \alpha^{n-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

e,

$$\begin{aligned} \beta^2 \cdot \beta^{n-1} &= (\beta + 1) \cdot \beta^{n-1} \Leftrightarrow \\ \beta^{2+n-1} &= \beta^{n-1+1} + \beta^{n-1} \Leftrightarrow \\ \beta^{n+1} &= \beta^n + \beta^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

As relações (3.9) e (3.10) mostram que as potências de α e β seguem a mesma recorrência dos números de Fibonacci e Lucas, formando progressões geométricas conectadas a esses números.

3.2 Potências Douradas: A Relação Entre α e β e as Sequências de Fibonacci e Lucas

Conforme demonstrado anteriormente pela Observação de Kepler, vimos que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \alpha$ quando $n \to \infty$, ou seja, tomando-se n arbitrariamente grande, os números de Fibonacci se comportam como se fossem componentes de uma progressão geométrica de razão α. Ainda, foi visualizado há pouco como os termos da progressão geométrica

$$\cdots, \alpha^{-6}, \alpha^{-5}, \alpha^{-4}, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6 \cdots$$

respeitam a mesma relação de recorrência da sequência de Fibonacci. A junção de tais fatos indicam que talvez possa existir alguma relação direta entre a sequência de potências de α e os números de Fibonacci. Com efeito, note que utilizando (3.9) para $n = 1$ e $n = 2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha^1 + \alpha^0 = 1\alpha + 1 \quad \text{e} \\ \alpha^3 &= \alpha^2 + \alpha^1 = 2\alpha + 1. \end{aligned}$$

Adicionando-se membro a membro essas equações e, repetindo indeterminadamente o processo de somar as duas últimas equações obtidas, obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= \alpha^3 + \alpha^2 = 3\alpha + 2, \\ \alpha^5 &= \alpha^4 + \alpha^3 = 5\alpha + 3, \\ \alpha^6 &= \alpha^5 + \alpha^4 = 8\alpha + 5, \\ \alpha^7 &= \alpha^6 + \alpha^5 = 13\alpha + 8, \\ \alpha^8 &= \alpha^7 + \alpha^6 = 21\alpha + 13, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De modo similar, por (3.9) temos que $\alpha^{n-1} = \alpha^{n+1} - \alpha^n$, subtraindo-se as equações obtidas por (3.9) para α^3 e α^2 e repetindo-se indefinidamente o processo de subtrair as duas últimas equações obtidas, temos

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \alpha^0 + \alpha^{-1} = 1\alpha + 0, \\ \alpha^0 &= \alpha^{-1} + \alpha^{-2} = 0\alpha + 1, \\ \alpha^{-1} &= \alpha^{-2} + \alpha^{-3} = 1\alpha - 1, \\ \alpha^{-2} &= \alpha^{-3} + \alpha^{-4} = -1\alpha + 2, \\ \alpha^{-3} &= \alpha^{-4} + \alpha^{-5} = 2\alpha - 3, \\ \alpha^{-4} &= \alpha^{-5} + \alpha^{-6} = -3\alpha + 5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Finalmente, podemos perceber que nas sequências de igualdades realizadas anteriormente não ocorre nenhuma alteração ao trocarmos α por β e, ao percebermos o padrão no lado direito dessas igualdades, pode-se inferir que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, vale que

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \quad \text{e,} \tag{3.11}$$

$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}. \tag{3.12}$$

Posteriormente, no que se segue as ideias apresentadas durante esta seção serão formalizadas. A seguir, veremos o teorema referente as equações (3.11) e (3.12) sendo ambas provadas simultaneamente, pois de α e β são raízes de $x^2 - x - 1 = 0$.

Teorema 3.1. *Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que*

$$x^2 = x + 1,$$

então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, vale que

$$x^n = xF_n + F_{n-1}. \tag{3.13}$$

Prova: A prova será feita por indução matemática inteira em n. Dado que $F_0 = 0$ e $F_{-1} = 1$, temos

$$xF_0 + F_{0-1} = x \cdot 0 + F_{-1} = 0 + 1 = 1 = x^0,$$

portanto, a identidade (3.13) é verdadeira para $n = 0$. Suponha que (3.13) seja válida para n, isto é

$$x^n = xF_n + F_{n-1}.$$

Efetuando-se a seguinte multiplicação por x e simplificando com o auxílio de $x^2 = x + 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} x^n \cdot x &= (xF_n + F_{n-1})x \Leftrightarrow \\ x^{n+1} &= x^2 F_n + xF_{n-1} \\ &= (x+1)F_n + xF_{n-1} \\ &= xF_n + F_n + xF_{n-1} \\ &= xF_{n+1} + F_n. \end{aligned}$$

Subtraindo-se as equações acima, dadas para x^{n+1} e x^n, obtém-se

$$\begin{aligned} x^{n-1} &= x^{n+1} - x^n \\ &= (xF_{n+1} + F_n) - (xF_n + F_{n-1}) \\ &= xF_{n+1} + F_n - xF_n - F_{n-1} \\ &= x(F_{n+1} - F_n) + F_n - F_{n-1} \\ &= xF_{n-1} + F_{n-2}. \end{aligned}$$

A validade da igualdade (3.13) para n implica sua validade para $n + 1$ e $n - 1$, concluindo que ela é verdadeira para todo n inteiro.

As identidades (3.11) e (3.12) são essenciais para derivar relações importantes envolvendo os números de Fibonacci, de Lucas e as constantes α e β. Adicionando-as para $n - 1$ e $n + 1$, obtém-se novas fórmulas.

$$\begin{aligned} \alpha^{n-1} &= \alpha F_{n-1} + F_{n-1-1} \\ &= \alpha F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\beta^{n+1} &= \beta F_{n+1} + F_{n+1-1} \\ &= \beta F_{n+1} + F_n.\end{aligned}$$

logo,

$$\alpha^{n-1} + \beta^{n+1} = \alpha F_{n-1} + F_{n-2} + \beta F_{n+1} + F_n.$$

E usando os resultados $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ juntamente com a fatoração $x^{n+1} + x^{n-1} = x^n(x + \frac{1}{x})$, assim como as relações (3.7) e (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned}\alpha^n \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) &= \alpha^{n+1} + \alpha^{n-1} \Leftrightarrow \\ \sqrt{5}\alpha^n &= \alpha F_{n+1} + F_n + \alpha F_{n-1} + F_{n-2} \Leftrightarrow \\ \sqrt{5}\alpha^n &= \alpha(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_n + F_{n-2} \Leftrightarrow \\ \sqrt{5}\alpha^n &= \alpha L_n + L_{n-1} \qquad (3.14)\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\beta^n \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) &= \beta^{n+1} + \beta^{n-1} \Leftrightarrow \\ -\sqrt{5}\beta^n &= \beta F_{n+1} + F_n + \beta F_{n-1} + F_{n-2} \Leftrightarrow \\ -\sqrt{5}\beta^n &= \beta(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_n + F_{n-2} \Leftrightarrow \\ -\sqrt{5}\beta^n &= \beta L_n + L_{n-1}. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Multiplicando as fórmulas (3.11) e (3.12) para $n+1$, respectivamente por β e por α, obtém-se

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} \cdot \beta = (\alpha F_{n+1} + F_n) \cdot \beta \Leftrightarrow \beta\alpha^{n+1} = \alpha\beta F_{n+1} + \beta F_n \quad \text{e,} \\ \beta^{n+1} \cdot \alpha = (\beta F_{n+1} + F_n) \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta^{n+1} = \alpha\beta F_{n+1} + \alpha F_n\end{aligned}$$

e, utilizando o fato de que $\alpha\beta = -1$ e reorganizando, obtém-se respectivamente

$$\begin{aligned}\beta\alpha^{n+1} &= -F_{n+1} + \beta F_n \Leftrightarrow \\ F_{n+1} &= \beta F_n - \alpha^n \alpha\beta \Leftrightarrow \\ F_{n+1} &= \beta F_n + \alpha^n \qquad (3.16)\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\alpha\beta^{n+1} &= \alpha\beta F_{n+1} + \alpha F_n \Leftrightarrow \\ F_{n+1} &= \alpha F_n - \beta^n \beta\alpha \Leftrightarrow \\ F_{n+1} &= \alpha F_n + \beta^n. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Repetindo-se o procedimento realizado acima com as fórmulas (3.14) e (3.15), tem-se

$$\begin{aligned}
-\sqrt{5}\beta^{n+1} &= \beta L_{n+1} + L_n \Leftrightarrow \\
-\sqrt{5}\beta^{n+1}\cdot\alpha &= (\beta L_{n+1} + L_n)\alpha \Leftrightarrow \\
-\sqrt{5}\beta^{n}(-1) &= (-1)L_{n+1} + \alpha L_n \Leftrightarrow \\
L_{n+1} &= \alpha L_n - \sqrt{5}\beta^n, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}\alpha^{n+1} &= \alpha L_{n+1} + L_n \Leftrightarrow \\
\sqrt{5}\alpha^{n+1}\cdot\beta &= (\alpha L_{n+1} + L_n)\beta \Leftrightarrow \\
\sqrt{5}\alpha^{n}(-1) &= (-1)L_{n+1} + \beta L_n \Leftrightarrow \\
L_{n+1} &= \beta L_n + \sqrt{5}\alpha^n. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Substituindo α e β em (3.11) e (3.12), no segundo membro, por seus valores numéricos, chega-se a

$$\begin{aligned}
\alpha^n &= \alpha F_n + F_{n-1} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)F_n + F_{n-1} \\
&= \frac{F_n + \sqrt{5}F_n}{2} + F_{n-1} \\
&= \frac{F_n + \sqrt{5}F_n + 2F_{n-1}}{2}
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\beta^n &= \beta F_n + F_{n-1} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_n + F_{n-1} \\
&= \frac{F_n - \sqrt{5}F_n}{2} + F_{n-1} \\
&= \frac{F_n - \sqrt{5}F_n + 2F_{n-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Simplificando as expressões através da relação $L_n = F_n + 2F_{n-1}$, obtém-se

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}, \qquad (3.20)$$

$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}. \qquad (3.21)$$

As relações entre as potências de α e β e os números de Fibonacci e Lucas têm diversas aplicações, permitindo a demonstração de resultados notórios, como a equação

${L_n}^2 - 5{F_n}^2 = 4(-1)^n$, agora obtida por outro método. Essas fórmulas também mostram que α^n e β^n, para $n \neq 0$, são irracionais e conduzem a identidades que lembram as fórmulas de De Moivre para potências de números complexos

$$\left(\frac{L_n \pm \sqrt{5}F_n}{2}\right)^m = \frac{L_{mn} \pm \sqrt{5}F_{mn}}{2}. \tag{3.22}$$

Na próxima seção iremos utilizar as relações (3.20) e (3.21) a fim de estabelecer duas das mais notórias identidades sobre os números de Lucas e de Fibonacci.

3.3 Momento em que Binet Encontra Fibonacci e Lucas

Nesta seção, demonstraremos a Fórmula de Binet para F_n, em que n é inteiro, incluindo uma relação similar para L_n. Tais fórmulas são fundamentais, pois permitem uma abordagem algébrica direta para verificar e generalizar relações envolvendo esses números, tornando-se ferramentas essenciais no estudo de suas propriedades.

Teorema 3.2. *Sejam $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$,*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \quad e \tag{3.23}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{3.24}$$

Prova: Subtraindo-se e somando-se, respectivamente, α^n e β^n temos

$$\alpha^n - \beta^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} - \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n - L_n + \sqrt{5}F_n}{2} = \frac{2\sqrt{5}F_n}{2} = \sqrt{5}F_n \quad \text{e}$$

$$\alpha^n + \beta^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} + \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n + L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = \frac{2L_n}{2} = L_n.$$

Por intermédio de um olhar simples e fácil, as equações acima, possuem uma propriedade misteriosa e instigante, diante do fato de ambas apresentarem como resultado números racionais através do uso de manipulações com potências de números irracionais. Buscando-se solucionar tal mistério, iremos reescrever as identidades (3.23) e (3.24) com o auxílio do teorema binomial, particularmente,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Ainda, considerando n natural e $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$ se $k > n$, reescrevendo (3.23) temos

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \cdot [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \cdot \Bigg(\left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{5}^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5}^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] - \\
&\qquad \left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^3 + \cdots \right] \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \cdot \Bigg(\left[1 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] - \\
&\qquad \left[1 - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \cdot \left[2 \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5} + 2 \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] = \frac{2\sqrt{5}}{2^n\sqrt{5}} \cdot \left[\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 + \cdots \right].
\end{aligned}$$

Finalmente, simplificando-se o numerador e denominador, temos

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} 5^2 + \begin{pmatrix} n \\ 7 \end{pmatrix} 5^3 + \cdots \right]. \tag{3.25}$$

De maneira análoga, reescrevendo-se (3.24) através do teorema binomial tem-se

$$\begin{aligned}
L_n &= \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \Bigg(\left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{5}^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] + \\
&\qquad \left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} (-\sqrt{5})^3 + \cdots \right] \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \Bigg(\left[1 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] + \\
&\qquad \left[1 - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{5} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{5}^3 + \cdots \right] \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \left[2 + 2 \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{5}^2 + 2 \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} \sqrt{5}^4 + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} 5^2 + \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix} 5^3 + \cdots \right].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

As relações acima nos permitem observar facilmente a origem racional das identidades de Binet para os números de Fibonacci e Lucas, e ainda, de maneira indireta, nos dão duas notórias fórmulas de divisibilidade entre coeficientes binomiais e potências de dois.

As identidades (3.25) e (3.26), ainda, são fornecedoras de informações a despeito da divisibilidade de F_n e L_n por números primos. Fazendo-se uso de teoremas elementares sobre congruências, Lucas provou o que chamou de "lei da aparição"cuja qual veremos a seguir.

Teorema 3.3. *Todo número primo p divide algum número de Fibonacci. Particularmente,*

$$\begin{aligned} F_{p-1} &\equiv 0 \ mod \ p \qquad se \ p = 5k \pm 1, \\ F_{p+1} &\equiv 0 \ mod \ p \qquad se \ p = 5k \pm 2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Prova: A demonstração a seguir parte do argumento usado em (14). Sabendo que $F_3 = 2$ e $F_5 = 5$, iremos supor $p \neq 2$ e $p \neq 5$. De (3.25),

$$2^{n-1}F_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \binom{n}{7}5^3 + \cdots,$$

sendo o último termo igual a $5^{\frac{1}{2}(n-1)}$ para o caso n ímpar, já para o caso n par temos o último termo como sendo igual a $n \cdot 5^{\frac{n-1}{2}}$. Partindo-se da teoria elementar das congruências módulo p, são válidas as proposições

i) $2^{p-1} \equiv 1 \text{ mod } p$,

ii) $\binom{p}{k} \equiv 0 \text{ mod } p \quad \text{se} \quad 1 \leq k \leq p-1$,

iii) $5^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \pm 1 \text{ mod } p$,

sendo i) um caso do pequeno teorema de Fermat, onde o mesmo diz que: dados $a \in \mathbb{Z}$ e p primo. Se p não divide a então p divide $a^{p-1} - 1$ (20). iii) trata-se de uma consequência desse mesmo teorema e ii) é verdadeira dado que o p no numerador não é cancelado. Logo, fazendo-se uso de i), ii) e iii) na relação (3.25), obtém-se a interessante fórmula

$$F_p \equiv \pm 1 \quad \text{mod } p. \tag{3.28}$$

Portanto, dado que p é ímpar, e pela fórmula de Cassini ($F_{p-1}F_{p+1} - F_p^2 = (-1)^p$), temos

$$F_{p-1}F_{p+1} \equiv 0 \quad \text{mod } p. \tag{3.29}$$

Note que por $\text{mdc}(F_{p-1}, F_{p+1}) = 1$, p divide apenas um destes números. A fim de determinarmos qual destes números, faremos $n = p + 1$ em (3.25) e observemos que

$\begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix} \equiv 0 \bmod p$ para $3 \leq k \leq p-1$, devido a mesma razão de ii). Então,

$$2^p F_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{1}{2}(p-1)} \quad mod\ p.$$

Isto é, a relação acima tem por consequência que $F_{p+1} \equiv 0 \bmod p$ todas as vezes em que $5^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1 \bmod p$, sendo assim $F_{p-1} \equiv 0 \bmod p$ se $5^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \bmod p$. Logo, tais casos são semelhantes, pelo fato da lei da reciprocidade quadrática, ao primo p ser das seguintes maneiras, respectivamente, $5k \pm 2$ e $5k \pm 1$ (25).

O fato de p dividir F_{p-1} ou F_{p+1} não implica necessariamente que estes sejam os menores números de Fibonacci para os quais tal fato vale, dado que $13|F_7$.

Vale ressaltar que (3.26), juntamente com *i*) e *ii*) subsidiam que

$$L_p \equiv 1 \qquad \text{mod p.} \tag{3.30}$$

Para demonstrar (3.30) iremos utilizar (3.26) juntamente com a segunda e terceira proposição da teoria elementar das congruências módulo p localizadas no Teorema 3.3. Assim,

$$L_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} 5^0 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 5^1 + \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} 5^2 + \cdots \right].$$

De $2^{p-1} \equiv 1 \mod$ p temos:

$$\begin{aligned} L_p &\equiv \frac{1}{1} \left[\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} p \\ 4 \end{pmatrix} 5^2 + \cdots \right] \\ &\equiv 1[1+0+0+\cdots] \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod \text{p}. \end{aligned}$$

Ao analisarmos o último termo da igualdade acima, verificamos que caso seja p o segundo termo do coeficiente binomial, teríamos um valor ímpar cujo valor não é possível, já que sempre é par. E já para quando o segundo termo do coeficiente é maior que p, tal coeficiente será congruente igual a zero módulo p, pela "lei básica"dos coeficientes.

Portanto, o último binômio é $\begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \mod \text{p}.$

3.4 A demonstração da Fórmula de Binet por Abraham De Moivre (1667-1754)

Abraham de Moivre, nascido em 26 de maio de 1667, na França, destacou-se como matemático por suas contribuições à Teoria das Probabilidades, Geometria Analítica e pela fórmula para potências de números complexos. Exilado na Inglaterra devido à perseguição religiosa, tornou-se especialista no Principia Mathematica de Newton, com quem formou amizade.

Apesar disso, enfrentou preconceitos que o impediram de lecionar em universidades, levando-o a atuar como professor particular de Matemática.

Figura 4 – Abraham De Moivre

Fonte: Google Imagens

Sua prova da fórmula de Binet no século XVIII é notável por ser pioneira e por utilizar o método das funções geradoras, uma abordagem inovadora baseada em séries formais. Tal forma é baseada na suposição de que os elementos de uma sequência são os coeficientes de uma série de potências, sendo esta reorganizada de modo a se obter o seu termo geral, com a ausência de um cuidado com a convergência.

Supondo-se que

$$G(x) = F_0 + F_1x^1 + F_2x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} F_nx^n, \quad (3.31)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} G(x) &= F_0x^0 + F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \cdots \\ xG(x) &= \qquad F_0x^1 + F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + F_4x^5 + \cdots \\ x^2G(x) &= \qquad\qquad F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Subtraindo-se a primeira identidade das demais e utilizando que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ temos

$$\begin{aligned} G(x) - xG(x) - x^2G(x) = x &\Leftrightarrow \\ G(x)(1 - x - x^2) = x &\Rightarrow \\ G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}&. \end{aligned}$$

Utilizando-se $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ e frações parciais, obtém-se

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}\right).$$

Logo, como $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$, e substituindo-se tal fato na equação anterior, temos

$$\begin{aligned} G(x) = \sum_{n\geq 0} F_nx^n = \frac{x}{1 - x - x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n - \sum_{n\geq 0} \beta^n x^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Portanto, comparando os coeficientes de x^n nessa igualdade, obtém-se

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

3.5 Binet em Ação: Explorando Identidades e Conjecturas nos Números de Fibonacci e Lucas

As identidades (3.23) e (3.24) nos fornecem um meio bem claro e fácil de se averiguar quaisquer relações que envolvam os números de Fibonacci e de Lucas. Exemplificando, temos que para verificar as identidades para índices negativos de F_n e L_n vistos anteriormente, basta utilizar as fórmulas de Binet para F_n e L_n com $n : -n$, e os fatos $(-1)^{-n} = (-1)^n$ e $\alpha\beta = -1$. Assim,

$$\begin{aligned}
F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{-n} - \beta^{-n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n\beta^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta^n - \alpha^n}{(\alpha\beta)^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta^n - \alpha^n}{(-1)^n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta^n - \alpha^n}{(-1)^{-n}}\right) = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}(-1)^{-n}} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}(-1)^{-n}} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = F_n(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
L_{-n} &= \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{\beta^n\alpha^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{(\alpha\beta)^n} \\
&= \frac{\beta^n + \alpha^n}{(-1)^n} = (\alpha^n + \beta^n)\frac{1}{(-1)^n} = L_n\frac{1}{(-1)^{-n}} = L_n(-1)^n.
\end{aligned}$$

De modo similar, pode-se demonstrar conjecturas com as fórmulas (3.23) e (3.24). Exemplo disto, são as primeiras linhas do seguinte teorema visto e demonstrado anteriormente, cujo qual temos que na sequência de Fibonacci, $F_{n+5} > 10F_n, n \geq 2$. Onde este nos fornece indicadores de que é sempre admissível a escrita do número F_n em termos de outros dois números de Fibonacci consecutivos (25),

$$F_n = F_{k-1}F_{n-k} + F_kF_{n-k+1}. \tag{3.32}$$

A fim de visualizar a equação acima basta que calculemos o segundo membro fazendo-se uso de (3.23), obtendo-se

$$\begin{aligned}
F_{k-1}F_{n-k} + F_kF_{n-k+1} &= \left(\frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-k+1} - \beta^{n-k+1}}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k})}{5} + \frac{(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k+1} - \beta^{n-k+1})}{5} \\
&= \frac{(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) + (\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k+1} - \beta^{n-k+1})}{5}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\alpha^{k-1+n-k} - \alpha^{k-1}\beta^{n-k} - \beta^{k-1}\alpha^{n-k} + \beta^{k-1+n-k})+}{5}$$
$$\frac{(\alpha^{k+n-k+1} - \alpha^{k}\beta^{n-k+1} - \beta^{k}\alpha^{n-k+1} + \beta^{k+n-k+1})}{5}$$
$$= \frac{\alpha^{n-1} - \alpha^{k-1}\beta^{n-k} - \beta^{k-1}\alpha^{n-k} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \alpha^{k}\beta^{n-k+1}-}{5}$$
$$\frac{\beta^{k}\alpha^{n-k+1} + \beta^{n+1}}{5}.$$

Reescrevendo-se

$$\begin{aligned} -\alpha^{k-1}\beta^{n-k} &= (\alpha\beta)\alpha^{k-1}\beta^{n-k} = \alpha^{k}\beta^{n-k+1} \qquad \text{e,} \\ -\alpha^{n-k}\beta^{k-1} &= (\alpha\beta)\alpha^{n-k}\beta^{k-1} = \alpha^{n-k+1}\beta^{k}. \end{aligned}$$

E sabendo-se que $\alpha\beta = -1$, temos que os termos mistos da expressão cancelam-se, restando-se

$$\frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{5}.$$

Agora, fazendo-se uso da fórmula de Binet para os números de Lucas, juntamente com $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$, temos

$$\frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5} = \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}) = F_n.$$

Observamos então que a igualdade acima fica verificada $\forall n, k \in \mathbb{Z}$ dado que

$$F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}.$$

Apesar da identidade (3.32) aparentemente ser uma nova relação, ela trata-se de uma antiga identidade conhecida e agora reescrita, dado que, se for feito $n : n+k$ obtém-se

$$F_{n+k} = F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1}, \tag{3.33}$$

sendo esta a relação $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$, uma das primeiras fórmulas a respeito dos números de Fibonacci vista no início do nosso estudo, e agora provada para todo $n, k \in \mathbb{Z}$.

3.6 Demonstração e Verificação de Identidades Algébricas Utilizando as Fórmulas de Binet

As identidades de Binet para os números de Lucas e Fibonacci igualmente podem ser utilizadas, a fim de produzir fórmulas e inferir propriedades a despeito de L_n e F_n. Exemplificando-se tal fato, temos ao considerar as familiares identidades algébricas

$$\begin{aligned} a^k - b^k &= (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}), \\ a^{2k} - b^{2k} &= (a^2 - b^2)(a^{2k-2} + a^{2k-4}b^2 + \cdots + a^2b^{2k-4} + b^{2k-2}), \\ a^{2k+1} + b^{2k+1} &= (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k}), \end{aligned}$$

sendo tais identidades válidas para $k \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Ao fazermos $a = \alpha^n$ e $b = \beta^n$ temos

$$\begin{aligned} \alpha^{nk} - \beta^{nk} &= (\alpha^n - \beta^n)B(\alpha, \beta), \\ \alpha^{2nk} - \beta^{2nk} &= (\alpha^{2n} - \beta^{2n})C(\alpha, \beta), \\ \alpha^{(2k+1)n} + \beta^{(2k+1)n} &= (\alpha^n + \beta^n)D(\alpha, \beta), \end{aligned} \tag{3.34}$$

em que $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ e $D(\alpha, \beta)$ tratam-se de polinômios simétricos com coeficientes inteiros em α e β. Conhece-se da álgebra que qualquer polinômio simétrico com coeficientes inteiros $P(x, y)$ (8), pode ser reescrito da seguinte maneira

$$P(x, y) = P'(x + y, xy)$$

onde $P'(.,.)$ é um polinômio com coeficientes inteiros. Daí, dado que $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha\beta = -1$, observa-se que $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ e $D(\alpha, \beta)$ são inteiros. Portanto, das identidades (3.34), dividindo-se as duas primeiras por $\sqrt{5}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{nk} - \beta^{nk}}{\sqrt{5}} &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)B(\alpha, \beta)}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^{nk} - \beta^{nk}}{\sqrt{5}} &= F_n \cdot B(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\ F_{nk} &= F_n \cdot B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Assim,

$$m = kn \qquad \Longrightarrow \qquad F_n | F_m. \tag{3.35}$$

Além disso, por

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{2nk} - \beta^{2nk}}{\sqrt{5}} &= \frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n})C(\alpha, \beta)}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\ F_{2nk} &= F_{2n} \cdot C(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\ F_{2nk} &= F_n L_n \cdot C(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

logo,

$$m = 2kn \qquad \Longrightarrow \qquad L_n | F_m. \tag{3.36}$$

Mais, ainda

$$\begin{aligned} \alpha^{(2k+1)n} + \beta^{(2k+1)n} &= (\alpha^n + \beta^n)D(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\ L_{(2k+1)n} &= L_n \cdot D(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$m = (2k+1)n \qquad \Longrightarrow \qquad L_n | L_m. \tag{3.37}$$

A demonstração das recíprocas das implicações acima é possível de se provar perante algumas restrições.

Demonstraremos que se $F_n|F_m$, então $m = nk$, para $n > 2$. De fato, por intermédio da divisão euclidiana, podemos realizar a divisão entre m e n e com isto obter,

$$m = kn + r \qquad\qquad (0 \leq r < n).$$

Então,

$$\begin{aligned} \alpha^m - \beta^m &= \alpha^{nk+r} - \beta^{nk+r} + \alpha^r\beta^{nk} - \alpha^r\beta^{nk} \\ &= \alpha^r(\alpha^{nk} - \beta^{nk}) + \beta^{nk}(\alpha^r - \beta^r) \Leftrightarrow \\ F_m &= \alpha^r F_{nk} + \beta^{nk} F_r. \end{aligned}$$

Sabemos que F_n divide F_{nk}, visto que nk é múltiplo de n, então supondo que $F_n|F_m$ então $F_n|\beta^{nk}F_r$. Como, β^{nk} é sempre irracional então $F_n|F_r$. Ainda, temos que como a sequência de Fibonacci possui apenas termos crescentes, para índices inteiros positivos maiores que 2, logo não podemos dividir um termo de ordem superior por outro de ordem inferior. Portanto $r = 0$, o que conclui a prova da recíproca de (3.35). De maneira similar, pode-se obter as demonstrações referentes as demais implicações.

As identidades $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ juntamente com as fórmulas advindas do binômio de Newton podem ser utilizadas para se obter identidades sobre F_n e L_n. Exemplo disto, temos

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2, \\ x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y), \end{aligned}$$

que substituindo-se $x = \alpha^n$ e $y = \beta^n$, dividindo-se por $\sqrt{5}$ quando necessário e relembrando que $\alpha^n\beta^n = (-1)^n$, obtém-se que para todo n inteiro são válidas as seguintes afirmações

$$\begin{aligned} (\alpha^n + \beta^n)^2 &= \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} \Leftrightarrow \\ L_n^2 &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(-1)^n = L_{2n} + 2(-1)^n, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^n - \beta^n)^2 &= \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n = L_{2n} - 2(-1)^n \Leftrightarrow \\ 5F_n^2 &= L_{2n} - 2(-1)^n \end{aligned} \tag{3.39}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\sqrt{5}} &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\ F_{2n} &= F_n L_n. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dentre tais relações, as equações (3.38) e (3.39) por intermédio da soma e da subtração podem ser utilizadas a fim de obter duas outras relações, sendo que a primeira não tinha sido vista anteriormente e a segunda é a relação $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ já provada anteriormente ao longo do estudo e agora deduzida de outra maneira

$$L_n^2 + 5F_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n + L_{2n} - 2(-1)^n = 2L_{2n}, \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} L_n^2 - 5F_n^2 &= L_{2n} + 2(-1)^n - (L_{2n} - 2(-1)^n) \\ &= 2(-1)^n + 2(-1)^n = 4(-1)^n. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Continuando-se, a título de exemplo, note as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= x^3 + 3xy(x+y) + y^3, \\ (x-y)^3 &= x^3 - 3xy(x-y) - y^3, \\ x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2), \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

Portanto, realizando-se o mesmo processo feito anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} (\alpha^n + \beta^n)^3 &= \alpha^{3n} + 3\alpha^n\beta^n(\alpha^n + \beta^n) + \beta^{3n} \Leftrightarrow \\ L_n^3 &= \alpha^{3n} + \beta^{3n} + 3(-1)^n(\alpha^n + \beta^n) = L_{3n} + 3(-1)^n L_n, \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^n - \beta^n)^3 &= \alpha^{3n} - 3\alpha^n\beta^n(\alpha^n - \beta^n) - \beta^{3n} \\ &= \alpha^{3n} - \beta^{3n} - 3(-1)^n(\alpha^n - \beta^n) \Leftrightarrow \\ 5F_n^3 &= F_{3n} - 3(-1)^n F_n, \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{3n} + \beta^{3n} &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{2n} - \alpha^n\beta^n + \beta^{2n}) \Leftrightarrow \\ L_{3n} &= L_n(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (-1)^n) = L_n(L_{2n} - (-1)^n) \end{aligned} \tag{3.45}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha^{3n} - \beta^{3n} &= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{2n} + \alpha^n\beta^n + \beta^{2n}) \\ &= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{2n} + \beta^{2n} + (-1)^n) = (\alpha^n - \beta^n)(L_{2n} + (-1)^n) \Leftrightarrow \\ F_{3n} &= F_n(L_{2n} + (-1)^n). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Outra forma de se obter relações sobre os números de Fibonacci e de Lucas é combinando-se suas respectivas fórmulas de recorrência com certas identidades algébricas, assim como o trabalho realizado pelo matemático italiano, em 1905, Giacomo Candido (1871 − 1941) (25). Note que, para $x, y \in \mathbb{R}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
[x^2 + y^2 + (x+y)^2]^2 &= [x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2]^2 \\
&= [2x^2 + 2y^2 + 2xy]^2 = [2x^2 + 2y^2 + 2xy] \cdot [2x^2 + 2y^2 + 2xy] \\
&= 4x^4 + 4x^2y^2 + 4x^3y + 4x^2y^2 + 4y^4 + 4xy^3 + 4x^3y + 4xy^3 + 4x^2y^2 \\
&= 4x^4 + 12x^2y^2 + 8x^3y + 4y^4 + 8xy^3 \\
&= 2x^4 + 2y^4 + 2x^4 + 8x^3y + 12x^2y^2 + 8xy^3 + 2y^4 \\
&= 2x^4 + 2y^4 + 2(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) \\
&= 2x^4 + 2y^4 + 2(x+y)^4 \\
&= 2[x^4 + y^4 + (x+y)^4],
\end{aligned}
$$

identidade esta que pode ser demonstrada algebricamente como realizado anteriormente ou geometricamente (19). Tomando-se $x = F_n$ e $y = F_{n+1}$, tem-se a intitulada identidade de Candido,

$$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 = 2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4). \tag{3.47}$$

Facilmente, nota-se que a identidade (3.47) é válida para qualquer sequência generalizada de Fibonacci, e, portanto, em particular válida para L_n.

3.7 Novas Perspectivas sobre às Somas de Fibonacci e de Lucas

Utilizando as fórmulas de Binet, é possível demonstrar e generalizar somas relacionadas a F_n e L_n, incluindo outras que serão estudadas. Um desses resultados, descoberto por Édouard Lucas em 1877, foi posteriormente revisitado por outros autores.

Teorema 3.4. *Para todo a, b inteiro, $a \neq 0$ e $n \geq 0$:*

i)

$$\sum_{k=0}^{n} F_{ak+b} = \frac{(-1)^a F_{an+b} + (-1)^b F_{a-b} - F_{an+a+b} + F_b}{(-1)^a - L_a + 1}. \tag{3.48}$$

ii)

$$\sum_{k=0}^{n} L_{ak+b} = \frac{(-1)^a L_{an+b} - (-1)^b L_{a-b} - L_{an+a+b} + L_b}{(-1)^a - L_a + 1}. \tag{3.49}$$

Prova: Utilizando-se a fórmula da soma da progressão geométrica finita, onde para $q \neq 1$ temos,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Fazendo-se uso da fórmula de Binet, fatorando e calculando a soma da P.G. obtém-se

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{ak+b} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{ak+b}-\beta^{ak+b}}{\sqrt{5}}, \\
&= \frac{\alpha^b}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}(\alpha^a)^k - \frac{\beta^b}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}(\beta^a)^k, \\
&= \frac{\alpha^b}{\sqrt{5}}\frac{\alpha^{an+a}-1}{\alpha^a-1} - \frac{\beta^b}{\sqrt{5}}\frac{\beta^{an+a}-1}{\beta^a-1}, \\
&= \frac{\alpha^b(\alpha^{an+a}-1)(\beta^a-1)-\beta^b(\alpha^a-1)(\beta^{an+a}-1)}{\sqrt{5}(\alpha^a-1)(\beta^a-1)} \\
&= \frac{(\alpha^{an+a+b}-\alpha^b)(\beta^a-1)-(\beta^b\alpha^a-\beta^b)(\beta^{an+a}-1)}{\sqrt{5}(\alpha^a\beta^a-\alpha^a-\beta^a+1)} \\
&= \frac{(\alpha^{an+a+b}-\alpha^b)(\beta^a-1)-(\beta^b\alpha^a-\beta^b)(\beta^{an+a}-1)}{\sqrt{5}(\alpha^a\beta^a-\alpha^a-\beta^a+1)} \\
&= \frac{(\alpha^{an+a+b}\beta^a-\alpha^{an+a+b}-\alpha^b\beta^a+\alpha^b)-(\beta^{an+a+b}\alpha^a-\beta^b\alpha^a-\beta^{an+a+b}+\beta^b)}{\sqrt{5}(\alpha^a\beta^a-\alpha^a-\beta^a+1)} \\
&= \frac{\alpha^{an+a+b}\beta^a-\alpha^{an+a+b}-\alpha^b\beta^a+\alpha^b-\beta^{an+a+b}\alpha^a+\beta^b\alpha^a+\beta^{an+a+b}-\beta^b}{\sqrt{5}(\alpha^a\beta^a-\alpha^a-\beta^a+1)}.
\end{aligned}
$$

Efetuando-se algumas manipulações como a expansão do numerador e denominador, agrupando os termos com expoentes semelhantes e colocando $\alpha\beta$ em evidência, obtém-se

$$
\frac{(\alpha\beta)^a(\alpha^{an+b}-\beta^{an+b})+(\alpha\beta)^b(\alpha^{a-b}-\beta^{a-b})-(\alpha^{an+a+b}-\beta^{an+a+b})+\alpha^b-\beta^b}{\sqrt{5}(\alpha^a\beta^a-(\alpha^a+\beta^a)+1)}.
$$

Finalmente, substituindo $\alpha\beta=-1$ juntamente com o uso das fórmulas de Binet (3.23) e (3.24) obtém-se o lado direito da soma (3.48)

$$
\frac{(-1)^aF_{an+b}+(-1)^bF_{a-b}-F_{an+a+b}+F_b}{(-1)^a-L_a+1}.
$$

De modo análogo iremos demonstrar a soma (3.49), logo

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} L_{ak+b} &= \sum_{k=0}^{n} \alpha^{ak+b}+\beta^{ak+b} \\
&= \alpha^b\sum_{k=0}^{n}(\alpha^a)^k+\beta^b\sum_{k=0}^{n}(\beta^a)^k \\
&= \alpha^b\frac{\alpha^{an+a}-1}{\alpha^a-1}+\beta^b\frac{\beta^{an+a}-1}{\beta^a-1} \\
&= \frac{\alpha^b(\alpha^{an+a}-1)(\beta^a-1)+\beta^b(\alpha^a-1)(\beta^{an+a}-1)}{(\alpha^a-1)(\beta^a-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha^{an+a+b}-\alpha^{b})(\beta^{a}-1)+(\beta^{b}\alpha^{a}-\beta^{b})(\beta^{an+a}-1)}{\alpha^{a}\beta^{a}-\alpha^{a}-\beta^{a}+1}\\
&= \frac{\alpha^{an+a+b}\beta^{a}-\alpha^{an+a+b}-\alpha^{b}\beta^{a}+\alpha^{b}+\beta^{an+a+b}\alpha^{a}-\beta^{b}\alpha^{a}-\beta^{an+a+b}+\beta^{b}}{(-1)^{a}-L_a+1}\\
&= \frac{(\alpha\beta)^{a}(\alpha^{an+b}+\beta^{an+b})-(\alpha\beta)^{b}(\alpha^{a-b}+\beta^{a-b})-(\alpha^{an+a+b}+\beta^{an+a+b})+\alpha^{b}+\beta^{b}}{(-1)^{a}-L_a+1}\\
&= \frac{(-1)^{a}L_{an+b}-(-1)^{b}L_{a-b}-L_{an+a+b}+L_b}{(-1)^{a}-L_a+1}.
\end{aligned}
$$

Do teorema anterior, temos o seguinte corolário, onde fazendo-se $b=0$ em (3.48) e (3.49), pode-se obter identidades mais fáceis de serem manipuladas e provadas:

$$
\sum_{k=0}^{n} F_{ak} = \frac{F_{an+a}+(-1)^{a+1}F_{an}-F_a}{L_a+(-1)^{a+1}-1}, \tag{3.50}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n} L_{ak} = \frac{L_{an+a}+(-1)^{a+1}L_{an}+L_a-2}{L_a+(-1)^{a+1}-1}. \tag{3.51}
$$

Tomando-se $a=1$ e $a=2$ na relação (3.50) tem-se nesta ordem que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{k} &= \frac{F_{1n+1}+(-1)^{1+1}F_{1n}-F_1}{L_1+(-1)^{1+1}-1}\\
&= \frac{F_{n+1}+(-1)^{2}F_{n}-F_1}{L_1+(-1)^{2}-1}\\
&= \frac{F_{n+1}+1F_{n}-1}{1+1-1}\\
&= \frac{F_{n+1}+F_{n}-1}{1}\\
&= F_{n+2}-1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{2k} &= \frac{F_{2n+2}+(-1)^{2+1}F_{2n}-F_2}{L_2+(-1)^{2+1}-1}\\
&= \frac{F_{2n+2}+(-1)^{3}F_{2n}-F_2}{L_2+(-1)^{3}-1}\\
&= \frac{F_{2n+2}-1F_{2n}-1}{3-1-1}\\
&= \frac{F_{2n+2}-F_{2n}-1}{1}\\
&= F_{2n+1}-1,
\end{aligned}
$$

constatando-se para a sequência de Fibonacci o que havia sido obtido anteriormente

i)

$$
\sum_{k=0}^{n} x_k = x_{n+2}-x_1. \tag{3.52}
$$

ii)
$$\sum_{k=0}^{n} x_{2k} = x_{2n+1} - x_{-1}. \tag{3.53}$$

Para $a = 3$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{3k} &= \frac{F_{3n+3} + (-1)^{3+1}F_{3n} - F_3}{L_3 + (-1)^{3+1} - 1} \\
&= \frac{F_{3n+3} + (-1)^4 F_{3n} - 2}{4 + (-1)^4 - 1} \\
&= \frac{F_{3n+3} + 1F_{3n} - 2}{4 + 1 - 1} \\
&= \frac{F_{3n+3} + F_{3n} - 2}{4} \\
&= \frac{F_{3n+2} + F_{3n+1} + F_{3n} - 2}{4} \\
&= \frac{F_{3n+2} + F_{3n+2} - 2}{4} \\
&= \frac{2F_{3n+2} - 2}{4} \\
&= \frac{F_{3n+2} - 1}{2},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

uma fórmula, ligeiramente mais trabalhosa de ser obtida que as demais anteriores. As identidades (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) além disso podem ser utilizadas com a ou b negativos. Particularmente, fazendo $a = -1$ em (3.50) e recordando que, por $F_{-n+1} = (-1)^n F_{n-1}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{-k} &= \frac{F_{(-1)n-1} + (-1)^{-1+1}F_{(-1)n} - F_{-1}}{L_{-1} + (-1)^{-1+1} - 1} \\
&= \frac{F_{-n-1} + (-1)^0 F_{-n} - F_{-1}}{L_{-1} + (-1)^0 - 1} \\
&= \frac{F_{-n-1} + F_{-n} - 1}{-1 + 1 - 1} \\
&= \frac{F_{-n-1} + F_{-n} - 1}{-1 + 1 - 1} \\
&= \frac{F_{-(n+2)+1} + F_{-(n+1)+1} - 1}{-1} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}F_{n+1} + (-1)^{n+1}F_n - 1}{-1} \\
&= (-1)^{n+3}F_{n+1} + (-1)^{n+2}F_n + 1 \\
&= (-1)^2(-1)^{n+1}F_{n+1} + (-1)(-1)^{n+1}F_n + 1 \\
&= (-1)^{n+1}F_{n+1} - (-1)^{n+1}F_n + 1 \\
&= (-1)^{n+1}(F_{n+1} - F_n) + 1 \\
&= (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Por intermédio do que foi visto anteriormente, podemos obter uma identidade fechada para a soma dos cubos dos primeiros números de Fibonacci. Combinando-se $F_n = (-1)^{n+1}F_{-n}$ e (3.44)

$$\begin{aligned} 5F_k^3 &= F_{3k} - 3(-1)^k F_k \\ &= F_{3k} - 3(-1)^k(-1)^{k+1}F_{-k} \\ &= F_{3k} - 3(-1)^{2k+1}F_{-k} \\ &= F_{3k} + 3F_{-k} \end{aligned} \tag{3.56}$$

logo, de (3.54) e (3.55) temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} F_k^3 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{F_{3k} + 3F_{-k}}{5} \\ &= \frac{\frac{F_{3n+2}-1}{2} + 3[(-1)^{n+1}F_{n-1} + 1]}{5} \\ &= \frac{\frac{F_{3n+2}-1+6[(-1)^{n+1}F_{n-1}+1]}{2}}{5} \\ &= \frac{F_{3n+2} - 1 + 6(-1)^{n+1}F_{n-1} + 6}{10} \\ &= \frac{F_{3n+2} + 6(-1)^{n+1}F_{n-1} + 5}{10}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Ainda, é possível obter somas fazendo-se uso do Teorema Binomial em conjunto com as identidades de Binet. Lembre que, se $x \in \mathbb{R}$ e n natural, temos

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Substituindo-se $x = \alpha$ e $x = \beta$, e relembrando-se de que as potências de α e β respeitam a relação de recorrência de Fibonacci, juntamente com (3.54) e (3.55), tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k = (1+\alpha)^n = (\alpha^2)^n = \alpha^{2n}, \tag{3.58}$$

analogamente, temos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^k = (1+\beta)^n = (\beta^2)^n = \beta^{2n}. \tag{3.59}$$

Sendo assim, realizando-se as manipulações algébricas abaixo nas identidades (3.58) e (3.59), temos

$$\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^k}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k, \tag{3.60}$$

$$\alpha^{2n}+\beta^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\alpha^{k}+\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\beta^{k}\Leftrightarrow$$
$$L_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}L_{k}. \tag{3.61}$$

Observe que, efetuando-se o produto das identidades (3.58) e (3.59) respectivamente por α^t e β^t, onde t é inteiro e fixado, tem-se

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\alpha^{k}\cdot\alpha^{t}=\alpha^{2n}\cdot\alpha^{t}\Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\alpha^{k+t}=\alpha^{2n+t},$$

e

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\beta^{k}\cdot\beta^{t}=\alpha^{2n}\cdot\beta^{t}\Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\beta^{k+t}=\beta^{2n+t}.$$

Efetuando-se os mesmos procedimentos realizados anteriormente obtemos

$$\frac{\alpha^{2n+t}-\beta^{2n+t}}{\sqrt{5}}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\alpha^{k+t}-\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\beta^{k+t}}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow$$
$$F_{2n+t}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}F_{k+t},$$

analogamente,

$$\alpha^{2n+t}+\beta^{2n+t}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\alpha^{k+t}+\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\beta^{k+t}\Leftrightarrow$$
$$L_{2n+t}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}L_{k+t}.$$

Fazendo-se de modo similar ao que foi realizado em (3.58), (3.59), (3.60) e (3.61), porém fazendo uso das equações $\alpha=\alpha^{-1}+1$ e $\beta=\beta^{-1}+1$ tem-se

$$(1-\alpha)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-\alpha)^{k}\Leftrightarrow$$
$$(-(\alpha)^{-1})^{n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-\alpha)^{k}\Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(\alpha^{-1})^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\alpha)^k \Leftrightarrow \\
(-1)^n\alpha^{-n} &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\alpha)^k
\end{aligned}
$$

De maneira análoga tem-se

$$
(-1)^n\beta^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\beta)^k
$$

Somando-se ambos os lados das identidades acima tem-se

$$
\begin{aligned}
(-1)^n\alpha^{-n} + (-1)^n\beta^{-n} &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\alpha)^k + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\beta)^k \Leftrightarrow \\
(-1)^n(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} ((-1)^k\alpha^k + (-1)^k\beta^k) \Leftrightarrow \\
(-1)^n(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k(\alpha^k + \beta^k) \Leftrightarrow \\
(\alpha\beta)^n(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} L_{-k} \Leftrightarrow \\
\beta^n + \alpha^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} L_{-k} \Leftrightarrow \\
L_n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} L_{-k}. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

Já efetuando-se a diferença das identidades e dividindo-se por $\sqrt{5}$ obtém-se

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^n\alpha^{-n} - (-1)^n\beta^{-n}}{\sqrt{5}} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\alpha)^k - \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-\beta)^k}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\
\frac{(-1)^n(\alpha^{-n} - \beta^{-n})}{\sqrt{5}} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} ((-1)^k\alpha^k - (-1)^k\beta^k))}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\
\frac{(\alpha\beta)^n(\alpha^{-n} - \beta^{-n})}{\sqrt{5}} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k(\alpha^k - \beta^k)}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\
\frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}}(-1) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k(\alpha^k - \beta^k)}{\sqrt{5}}(-1) \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}(\alpha^k - \beta^k)}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$
$$F_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} F_k}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$
$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{-k}. \tag{3.63}$$

Por fim, utilizaremos novamente o teorema binomial, porém agora de maneira indireta a fim de se obter as somas de Fibonacci e de Lucas, em conjunto com as equações (3.20) e (3.21). Relembrando-se que (3.11) em conjunto com a fórmula $2\alpha^2 = 1 + \alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha^3$, é possível escrever que

$$\begin{aligned}(1+\alpha^3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha F_{3k} + F_{3k-1}) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{3k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{3k-1}.\end{aligned}$$

Como,

$$(1+\alpha^3)^n = 2^n \alpha^{2n} = 2^n(\alpha F_{2n} + F_{2n-1}),$$

comparando-se coeficientes, um vez que para $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ a igualdade $a\alpha + b = c\alpha + d$ é válida, se e somente se, $a = c$ e $b = d$, pode-se concluir que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{3k} = 2^n F_{2n}. \tag{3.64}$$

Uma justificativa um pouco mais elaborada que a anterior demonstra que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{2k} = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} F_n, & \text{se } n \text{ é par}, \\ 5^{\frac{n-1}{2}} L_n, & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases} \tag{3.65}$$

A visualização das demonstrações das somas (3.64) e (3.65) além de outras de caráter similar, fazendo-se uso de diferentes fórmulas sobre os números de Fibonacci e de Lucas encontram-se em (12).

3.8 A Observação de Kepler sob uma Nova Perspectiva: Conexões entre Binet, Fibonacci e Lucas

Anteriormente, foi-se visto o limite que relaciona a proporção áurea à sequência de Fibonacci não é exclusivo a ela, mas também se aplica às sequências generalizadas, como a de Lucas. Para avançar, é necessário demonstrar identidades intermediárias, derivadas diretamente das equações de Binet (3.23) e (3.24). Note que

$$\alpha^{n+k} - \beta^{n+k} = \alpha^k(\alpha^n - \beta^n) + \beta^n(\alpha^k - \beta^k)$$

e,

$$\alpha^{n+k} + \beta^{n+k} = \alpha^k(\alpha^n + \beta^n) - \beta^n(\alpha^k - \beta^k).$$

Por conseguinte, para quaisquer $n, k \in \mathbb{Z}$ são válidas as relações

$$\begin{aligned}
(\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} &= \alpha^k(\alpha^n - \beta^n) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \beta^n(\alpha^k - \beta^k) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\
F_{n+k} &= \alpha^k F_n + \beta^n F_k, \qquad (3.66) \\
\alpha^{n+k} + \beta^{n+k} &= \alpha^k(\alpha^n + \beta^n) - \beta^n(\sqrt{5}F_k) \Leftrightarrow \\
L_{n+k} &= \alpha^k L_n - \sqrt{5}\beta^n F_k. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Após feito tal preparo, podemos então seguir adiante a fim de demonstrar-se o resultado a seguir.

Teorema 3.5 (Limites de F_n e de L_n). *Se $k \in \mathbb{Z}$,*

$$i) \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \alpha^k. \qquad (3.68)$$

$$ii) \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+k}}{L_n} = \alpha^k. \qquad (3.69)$$

$$iii) \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}. \qquad (3.70)$$

Prova: Inicialmente, iremos dividir ambos os lados de (3.66) por F_n:

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+k}}{F_n} &= \frac{\alpha^k F_n}{F_n} + \frac{\beta^n}{F_n}F_k \\
&= \alpha^k + \frac{\beta^n}{F_n}F_k.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, ao realizar o procedimento de dividir ambos os lados de (3.67) por L_n obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{L_{n+k}}{L_n} &= \frac{\alpha^k L_n}{L_n} - \sqrt{5}\frac{\beta^n}{L_n}F_k \\
&= \alpha^k - \sqrt{5}\frac{\beta^n}{L_n}F_k.
\end{aligned}$$

Relembrando-se que $\beta^n = \dfrac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned}
2\beta^n &= 2\left(\frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}\right) \Leftrightarrow \\
\frac{2\beta^n}{F_n} &= \frac{L_n}{F_n} - \frac{\sqrt{5}F_n}{F_n} \Leftrightarrow \\
\frac{L_n}{F_n} &= \sqrt{5} + 2\frac{\beta^n}{F_n}.
\end{aligned}$$

Por fim, observe que dado que $|\beta| < 1$ vale que $|\beta|^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{L_{n+1}}{L_n}$	$\frac{L_n}{F_n}$
1	$\frac{1}{1} = 1{,}00000000$	$\frac{3}{1} = 3{,}00000000$	$\frac{1}{1} = 1{,}00000000$
2	$\frac{2}{1} = 2{,}00000000$	$\frac{4}{3} \approx 1{,}33333333$	$\frac{3}{1} = 3{,}00000000$
3	$\frac{3}{2} = 1{,}50000000$	$\frac{7}{4} = 1{,}75000000$	$\frac{4}{2} = 2{,}00000000$
4	$\frac{5}{3} \approx 1{,}66666667$	$\frac{11}{7} \approx 1{,}57142857$	$\frac{7}{3} \approx 2{,}33333333$
5	$\frac{8}{5} = 1{,}60000000$	$\frac{18}{11} \approx 1{,}63636364$	$\frac{11}{5} = 2{,}20000000$
6	$\frac{13}{8} = 1{,}62500000$	$\frac{29}{18} \approx 1{,}61111111$	$\frac{18}{8} = 2{,}25000000$
7	$\frac{21}{13} \approx 1{,}62500000$	$\frac{29}{18} \approx 1{,}61111111$	$\frac{29}{13} \approx 2{,}23076923$
8	$\frac{34}{21} \approx 1{,}61904762$	$\frac{76}{47} \approx 1{,}61702128$	$\frac{47}{21} \approx 2{,}23809524$
9	$\frac{55}{34} \approx 1{,}61764706$	$\frac{123}{76} \approx 1{,}61842105$	$\frac{76}{34} \approx 2{,}23529412$
10	$\frac{89}{55} \approx 1{,}61818182$	$\frac{199}{123} \approx 1{,}61788618$	$\frac{123}{55} \approx 2{,}23636364$
11	$\frac{144}{89} \approx 1{,}61797753$	$\frac{322}{199} \approx 1{,}61809045$	$\frac{199}{89} \approx 2{,}23595506$
12	$\frac{233}{144} \approx 1{,}61805556$	$\frac{521}{322} \approx 1{,}61801242$	$\frac{322}{144} \approx 2{,}23611111$
13	$\frac{377}{233} \approx 1{,}61802575$	$\frac{843}{521} \approx 1{,}61804223$	$\frac{521}{233} \approx 2{,}23605150$
14	$\frac{610}{377} \approx 1{,}61803714$	$\frac{1364}{843} \approx 1{,}61803084$	$\frac{843}{377} \approx 2{,}23607427$
15	$\frac{987}{610} \approx 1{,}61803279$	$\frac{2207}{1364} \approx 1{,}61803519$	$\frac{1364}{610} \approx 2{,}23606557$
16	$\frac{1597}{987} \approx 1{,}61803445$	$\frac{3571}{2204} \approx 1{,}61803353$	$\frac{2207}{987} \approx 2{,}23606890$
17	$\frac{2584}{1597} \approx 1{,}61803381$	$\frac{5778}{3571} \approx 1{,}61803416$	$\frac{3571}{1597} \approx 2{,}23606763$
18	$\frac{4181}{2584} \approx 1{,}61803406$	$\frac{9349}{5778} \approx 1{,}61803392$	$\frac{5778}{2584} \approx 2{,}23606811$
19	$\frac{6765}{4181} \approx 1{,}61803396$	$\frac{15127}{9349} \approx 1{,}61803401$	$\frac{9349}{4181} \approx 2{,}23606793$
20	$\frac{10946}{6765} \approx 1{,}61803400$	$\frac{24476}{15127} \approx 1{,}61803398$	$\frac{15127}{6765} \approx 2{,}23606800$
21	$\frac{17711}{10946} \approx 1{,}61803399$	$\frac{39603}{24476} \approx 1{,}61803399$	$\frac{24476}{10946} \approx 2{,}23606797$
22	$\frac{28657}{17711} \approx 1{,}61803399$	$\frac{64079}{39603} \approx 1{,}61803399$	$\frac{39603}{17711} \approx 2{,}23606798$
23	$\frac{46368}{28657} \approx 1{,}61803399$	$\frac{103682}{64079} \approx 1{,}61803399$	$\frac{64079}{28657} \approx 2{,}23606798$
24	$\frac{75025}{46368} \approx 1{,}61803399$	$\frac{167761}{103682} \approx 1{,}61803399$	$\frac{103682}{46368} \approx 2{,}23606798$
25	$\frac{121393}{75025} \approx 1{,}61803399$	$\frac{271443}{167761} \approx 1{,}61803399$	$\frac{167761}{75025} \approx 2{,}23606798$

Tabela 1 – Valores iniciais dos limites do Teorema 3.5, para $k = 1$

$$\alpha \approx 1{,}618033988749895, \qquad \sqrt{5} = 2{,}23606797749979.$$

Note que da tabela anterior, temos que a demonstração ofertada pelo teorema acima mostra além do que simplesmente o estabelecimento da convergência, dado que podemos observar que para $n \in \mathbb{N}$, os valores $\dfrac{F_{n+k}}{F_n}$, $\dfrac{L_{n+k}}{L_n}$ e $\dfrac{L_n}{F_n}$ variam para menos ou mais dos seus respectivos limites, a depender do valor de β^n ser positivo ou negativo. Sendo assim, dos dois primeiros limites, é possível concluir que, para $k, n \in \mathbb{N}$, valem

$$\frac{F_{k+1}}{F_1} < \frac{F_{k+3}}{F_3} < \frac{F_{k+5}}{F_5} < \cdots < \alpha^k < \cdots < \frac{F_{k+6}}{F_6} < \frac{F_{k+4}}{F_4} < \frac{F_{k+2}}{F_2},$$
$$\frac{L_{k+2}}{L_2} < \frac{L_{k+4}}{L_4} < \frac{L_{k+6}}{L_6} < \cdots < \alpha^k < \cdots < \frac{L_{k+5}}{L_5} < \frac{L_{k+3}}{L_3} < \frac{L_{k+1}}{L_1}.$$

Ainda, para provar o próximo resultado iremos fazer uso da desigualdade da fração mediante.

Proposição 3.6 (Desigualdade da Fração Mediante)**.** *Se* $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ *e* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, *então* $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Prova: Se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $ad < bc$. Portanto,

$$\begin{aligned} ab + ad &< ab + bc \\ \Leftrightarrow a(b+d) &< b(a+c) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} ad + cd &< bc + cd \\ \Leftrightarrow d(a+c) &< c(b+d) \\ \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

Portanto, por transitividade, $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

Agora, utilizando a Proposição anterior juntamente com $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, temos

$$\frac{F_{k+1}}{F_1} < \frac{L_{k+2}}{L_2} < \frac{F_{k+3}}{F_3} < \cdots < \alpha^k < \cdots < \frac{F_{k+4}}{F_4} < \frac{L_{k+3}}{L_3} < \frac{F_{k+2}}{F_2}.$$

Já do terceiro limite podemos deduzir que,

$$\frac{L_1}{F_1} < \frac{L_3}{F_3} < \frac{L_5}{F_5} < \cdots < \sqrt{5} < \cdots < \frac{L_6}{F_6} < \frac{L_4}{F_4} < \frac{L_2}{F_2}.$$

A tabela demonstra a rápida convergência dos limites (3.68), (3.69) e (3.70), com quatro casas decimais corretas já para $n = 13$. Além disso, a igualdade entre os limites (3.68) e (3.69) decorre diretamente da relação de recorrência. Sequências análogas à de

Fibonacci, iniciadas com quaisquer valores reais, também convergem a limites iguais a α^k, devido à forma específica de suas fórmulas de Binet serem da forma

$$y_n = a\alpha^n + b\beta^n, \text{com } a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.71}$$

Assim, a menos do caso em que $a = 0$, por $|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$, pode-se concluir que

$$\frac{y_{n+k}}{y_n} = \frac{a\alpha^{n+k} + b\beta^{n+k}}{a\alpha^n + b\beta^n} = \frac{a\alpha^{n+k}(1 + \frac{b}{a}(\frac{\beta}{\alpha})^{n+k})}{a\alpha^n(1 + \frac{b}{a}(\frac{\beta}{\alpha})^n)} \to \alpha^k, \qquad n \to \infty.$$

4 A Relação Entre Números Complexos, Funções Trigonométricas, F_n e L_n

Agora, iremos explorar algumas conexões interessantes existentes entre F_n e L_n e as funções seno e cosseno. Como motivação para os próximos desenvolvimentos, considere a seguinte tabela:

Fórmula trigonométrica	Relação com F_n e L_n
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$	$F_{2n} = F_n L_n$ (3.40)
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$	$L_{2n} = \frac{1}{2}(L_n^2 + 5F_n^2)$ (3.41)
$= 2\cos^2(a) - 1$	$= L_n^2 - 2(-1)^n$
$= 1 - 2\sin^2(a)$	$= 2(-1)^n + 5F_n^2$
$\sin(-a) = -\sin(a)$	$F_{-n} = -(-1)^n F_n$
$\cos(-a) = \cos(a)$	$L_{-n} = (-1)^n L_n$

Ao longo dos anos, muitos matemáticos observaram nessas relações uma correspondência entre $\sin(a)$ e F_n e entre $\cos(a)$ e L_n, ou seja, com exceção dos coeficientes, as identidades possuem os mesmos componentes. A visualização de listas mais extensas contendo equações trigonométricas e suas similares à Fibonacci e Lucas podem ser encontradas em (18). Exemplo disto, note a correspondência entre as identidades para soma e subtração de arcos

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b),\\
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a),
\end{aligned}$$

e as equações a seguir

$$F_{m+n} = \frac{1}{2}(F_n L_m + F_m L_n), F_{m-n} = \frac{1}{2}(-1)^n(F_m L_n - F_n L_m) \text{ e } L_{m+n} = \frac{1}{2}(L_n L_m + 5F_m F_n).$$

Tais equações podem ser obtidas por intermédio da aplicação do seguinte Teorema já estudado e demonstrado anteriormente: se x_n é uma sequência generalizada de Fibonacci, então $x_n = x_2 F_{n-1} + x_1 F_{n-2}$. De fato, fixando-se m e considerando $x_n = F_{m+n}$ e, em seguida, $x_n = L_{m+n}$ obtém-se

$$
\begin{aligned}
F_{m+n} &= x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2} \\
&= F_{m+2}F_{n-1} + F_{m+1}F_{n-2} \\
&= F_{m+2}F_{n-1} + F_{m+1}(F_n - F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}(F_{m+2} - F_{m+1}) + F_{m+1}F_n \\
&= F_{n-1}F_m + F_{m+1}F_n \\
&= \frac{L_n - F_n}{2}F_m + F_{m+1}F_n \\
&= \frac{F_mL_n}{2} - \frac{F_mF_n}{2} + \frac{F_{m+1}F_n}{2} + \frac{F_{m+1}F_n}{2} \\
&= \frac{F_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}F_{m-1} + \frac{F_{m+1}F_n}{2} \\
&= \frac{F_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}(F_{m+1} + F_{m-1}) \\
&= \frac{F_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}L_m \\
&= \frac{1}{2}(F_mL_n + F_nL_m) \\
&= \frac{1}{2}(F_nL_m + F_mL_n). \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Trocando-se $n : -n$ na identidade anterior, juntamente com a utilização de $F_{-n} = -(-1)^nF_n$ e $L_{-n} = (-1)^nL_n$ tem-se

$$
\begin{aligned}
F_{m-n} &= \frac{1}{2}(F_{-n}L_m + F_mL_{-n}) \\
&= \frac{1}{2}(-(-1)^nF_nL_m + F_m(-1)^nL_n) \\
&= \frac{1}{2}(-1)^n(-F_nL_m + F_mL_n) \\
&= \frac{1}{2}(-1)^n(F_mL_n - F_nL_m).
\end{aligned}
$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito em (4.1) tem-se

$$
\begin{aligned}
L_{m+n} &= x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2} \\
&= L_{m+2}F_{n-1} + L_{m+1}F_{n-2} \\
&= L_{m+2}F_{n-1} + L_{m+1}(F_n - F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}(L_{m+2} - L_{m+1}) + L_{m+1}F_n \\
&= F_{n-1}L_m + L_{m+1}F_n \\
&= \frac{L_n - F_n}{2}L_m + L_{m+1}F_n \\
&= \frac{L_mL_n - F_nL_m}{2} + \frac{L_{m+1}F_n}{2} + \frac{L_{m+1}F_n}{2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L_mL_n}{2} - \frac{F_nL_m}{2} + \frac{L_{m+1}F_n}{2} + \frac{L_{m+1}F_n}{2}\\
&= \frac{L_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}(L_{m+1} - L_m) + \frac{L_{m+1}F_n}{2}\\
&= \frac{L_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}L_{m-1} + \frac{L_{m+1}F_n}{2}\\
&= \frac{L_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}(L_{m+1} + L_{m-1})\\
&= \frac{L_mL_n}{2} + \frac{F_n}{2}5F_m\\
&= \frac{1}{2}(L_nL_m + 5F_mF_n). \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

A seguir, iremos formalizar essas ideias. Para tal fato, iremos utilizar o método feito em (18), no qual se faz uso dos números complexos. Agora, será feita a observação de que as funções elementares podem ser estendidas para os números complexos, sendo estas estudadas em cursos de funções de variável complexa ou em qualquer livro texto sobre o tema. Uma das equações mais conhecidas nesse contexto é a de Euler,

$$e^{zi} = \cos(z) + i\sin(z),$$

cuja qual estende a função exponencial $\forall z \in \mathbb{C}$. Ainda, adicionando-se e subtraindo-se respectivamente as identidades para e^{zi} e e^{-zi} tem-se, as fórmulas

$$\begin{aligned}
e^{zi} + e^{-zi} &= (\cos(z) + i\sin(z)) + \cos(-z) + i\sin(-z)\\
&= \cos(z) + i\sin(z) + \cos(-z) + i\sin(-z)\\
&= \cos(z) + i\sin(z) + \cos(z) - i\sin(-z) = 2\cos(z)\\
\Leftrightarrow \cos(z) &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cosh(zi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{zi} - e^{-zi} &= (\cos(z) + i\sin(z)) - (\cos(-z)) + i\sin(-z)\\
&= \cos(z) + i\sin(z) - \cos(-z) - i\sin(-z)\\
&= \cos(z) + i\sin(z) - \cos(z) + i\sin(z) = 2i\sin(z)\\
\Leftrightarrow \sin(z) &= \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{\sinh(zi)}{i},
\end{aligned}$$

tornando-se evidente a interconexão entre as funções exponencial complexa, trigonométricas, e as funções hiperbólicas. Ainda, assim como, para qualquer par de números reais u e v tais que $u^2 + v^2 = 1$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $u = cos\theta$, $v = sen\theta$, o mesmo é válido para quaisquer pares de números complexos u e v sob as mesmas condições, desse modo existe um $\theta \in \mathbb{C}$. Considere a fórmula fundamental para seno e cosseno e sua similar

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Apesar de tais equações serem similares no contexto aqui exibido, elas são bastante dissimilares. Observe que reescrevendo a segunda expressão, obtém-se

$$(L_n)^2 + (i\sqrt{5}F_n)^2 = (2i^n)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{L_n}{2i^n}\right)^2 + \left(\frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n}\right)^2 = 1.$$

Denotando
$$u_n = \frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{L_n}{2i^n},$$
tem-se que $u_n^2 + v_n^2 = 1$. Assim, como
$$u_0 = \frac{i\sqrt{5}F_0}{2i^0} = \frac{i\sqrt{5}\cdot 0}{2\cdot 1} = 0$$
e,
$$v_0 = \frac{L_0}{2i^0} = \frac{2}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1,$$
partindo-se de tais fatos pode-se conjecturar que $u_n = \sin(nl)$ e $v_n = \cos(nl)$ para algum $l \in \mathbb{C}$. Supondo tal conjectura verdadeira, obtém-se

$$\begin{aligned} &\sin(1l) = u_1 \\ \Leftrightarrow &\sin(l) = \frac{i\sqrt{5}F_1}{2i^1} = \frac{i\sqrt{5}}{2i} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

ainda,

$$\begin{aligned} &\cos(1l) = v_1 \\ \Leftrightarrow &\cos(l) = \frac{L_1}{2i^1} = \frac{1}{2i}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Através deste preparo, é possível demonstrar o resultado a seguir, sendo este o principal desta seção.

Teorema 4.1. *Se* $l \in \mathbb{C}$, $\sin(l) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ *e* $\cos(l) = \frac{1}{2i}$ *então para* $n \in \mathbb{Z}$ *vale,*

$$i) \quad F_n = \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(nl) \tag{4.5}$$
$$ii) \quad L_n = 2i^n\cos(nl). \tag{4.6}$$

Prova: Iremos provar ambas as identidades pelo método da indução. Fazendo-se uso das fórmulas para arco duplo, temos que

$$\begin{aligned} \sin(2l) &= \sin(l+l) = \sin(l)\cos(l) + \sin(l)\cos(l) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{2i} + \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{2i} = \frac{\sqrt{5}}{4i} + \frac{\sqrt{5}}{4i} = 2\frac{\sqrt{5}}{4i} = \frac{\sqrt{5}}{2i} \end{aligned}$$

e,

$$
\begin{aligned}
\cos(2l) &= \cos(l+l) = \cos(l)\cos(l) - \sin(l)\sin(l)\\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{2i} - \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{4i^2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4(-1)} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Dado que,

$$\frac{2i^0}{i\sqrt{5}}\sin(0l) = \frac{2(1)}{i\sqrt{5}}\sin(0) = \frac{2}{i\sqrt{5}}0 = 0 = F_0$$

ainda,

$$\frac{2i^1}{i\sqrt{5}}\sin(1l) = \frac{2i}{i\sqrt{5}}\sin(l) = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{2} = 1 = F_1.$$

temos que a identidade (4.5) é válida para $n = 0$ e $n = 1$. Supondo-se que (4.5) seja válida para $n+1$ e n tem-se

$$F_{n+1} = \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\sin(n+1)l \qquad \text{e} \qquad F_n = \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l.$$

Adicionando-se essas identidades e utilizando a fórmula para $\sin(a+b)$, temos

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\sin(n+1)l + \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\sin(nl+l) + \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}[\sin(nl)\cos(l) + \sin(l)\cos(nl)] + \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\left[\sin(nl)\frac{1}{2i} + \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(nl)\right] + \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\left[\frac{\sin(nl)}{2i} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2}\right] + \frac{2i^n\sin(n)l}{i\sqrt{5}}\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\cdot\frac{i}{i}\left[\frac{\sin(nl)}{2i} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2}\right] + \frac{2i^n\sin(n)l}{i\sqrt{5}}\cdot\frac{i^2}{i^2}\\
&= \frac{2i^{n+2}}{i^2\sqrt{5}}\left[\frac{\sin(nl)}{2i} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2}\right] + \frac{2i^{n+2}\sin(n)l}{i^3\sqrt{5}}\\
&= 2i^{n+2}\left[\frac{\sin(nl)}{2\sqrt{5}i^3} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2\sqrt{5}i^2}\right] - \frac{2i^{n+2}\sin(n)l}{i\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2i^{n+2}\left[\frac{\sin(nl)}{2\sqrt{5}i^3} - \frac{\cos(nl)}{2}\right] - \frac{2i^{n+2}\sin(n)l}{i\sqrt{5}}\\
&= 2i^{n+2}\left[\frac{\sin(nl)}{2\sqrt{5}i^3} - \frac{\cos(nl)}{2} - \frac{\sin(n)l}{i\sqrt{5}}\right]\\
&= 2i^{n+2}\left[\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}i} - \frac{1}{i\sqrt{5}}\right)\sin(nl) - \frac{\cos(nl)}{2}\right]\\
&= 2i^{n+2}\left[\left(\frac{-1-2}{2\sqrt{5}i}\right)\sin(nl) - \frac{\cos(nl)}{2}\right]\\
&= 2i^{n+2}\left[-\left(\frac{3}{2\sqrt{5}i}\right)\sin(nl) - \left(\frac{1}{2}\right)\cos(nl)\right]\\
&= \frac{2i^{n+2}}{i\sqrt{5}}\sin(n+2)l.
\end{aligned}
$$

Subtraindo-se as mesmas equações e procedendo como acima obtemos

$$
\begin{aligned}
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\sin(n+1)l - \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\sin(nl+l) - \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}[\sin(nl)\cos(l) + \sin(l)\cos(nl)] - \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\left[\sin(nl)\frac{1}{2i} + \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(nl)\right] - \frac{2i^n}{i\sqrt{5}}\sin(n)l\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\left[\frac{\sin(nl)}{2i} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2}\right] - \frac{2i^n\sin(n)l}{i\sqrt{5}}\\
&= \frac{2i^{n+1}}{i\sqrt{5}}\cdot\frac{i^{-2}}{i^{-2}}\left[\frac{\sin(nl)}{2i} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2}\right] - \frac{2i^n\sin(n)l}{i\sqrt{5}}\cdot\frac{i^{-1}}{i^{-1}}\\
&= \frac{2i^{n-1}}{i^{-1}\sqrt{5}}\left[\frac{\sin(nl)}{2i} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2}\right] - \frac{2i^{n-1}\sin(n)l}{\sqrt{5}}\\
&= 2i^{n-1}\left[\frac{\sin(nl)}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}\cos(nl)}{2\sqrt{5}i^{-1}}\right] - \frac{2i^{n-1}\sin(n)l}{\sqrt{5}}\\
&= 2i^{n-1}\left[\frac{\sin(nl)}{2\sqrt{5}} + \frac{\cos(nl)}{2i^{-1}}\right] - \frac{2i^{n-1}\sin(n)l}{\sqrt{5}}\\
&= 2i^{n-1}\left[\frac{\sin(nl)}{2\sqrt{5}} + \frac{\cos(nl)}{2i^{-1}} - \frac{\sin(n)l}{\sqrt{5}}\right]\\
&= 2i^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sin(nl) + \frac{\cos(nl)}{2i^{-1}}\right]\\
&= 2i^{n-1}\left[\left(\frac{1-2}{2\sqrt{5}}\right)\sin(nl) + \frac{\cos(nl)}{2i^{-1}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2i^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}i^2}\right)\sin(nl) + \left(\frac{1}{2i^{-1}}\right)\cos(nl)\right]\\
&= 2i^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}i^2}\right)\sin(nl) + \left(\frac{1}{2i^{-1}}\frac{i^2}{i^2}\right)\cos(nl)\right]\\
&= 2i^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}i^2}\right)\sin(nl) + \left(\frac{i^2}{2i}\right)\cos(nl)\right]\\
&= 2i^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}i^2}\right)\sin(nl) - \left(\frac{1}{2i}\right)\cos(nl)\right]\\
&= \frac{2i^{n-1}}{i\sqrt{5}}\sin(n-1)l.
\end{aligned}
$$

De maneira análoga, iremos provar o item ii), sendo assim supondo a identidade (4.13) válida para n e para $n+1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n\\
&= 2i^{n+1}\cos(n+1)l + 2i^n\cos(nl)\\
&= 2i^{n+1}\cos(nl+l) + 2i^n\cos(nl)\\
&= 2i^{n+1}[\cos(nl)\cos(l) - \sin(nl)\sin(l)] + 2i^n\cos(nl)\\
&= 2i^{n+1}\left[\cos(nl)\frac{1}{2i} - \sin(nl)\frac{\sqrt{5}}{2}\right] + 2i^n\cos(nl)\\
&= 2i^{n+1}\left[\frac{\cos(nl)}{2i} - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2}\right] + 2i^n\cos(nl)\\
&= 2i^{n+1}\cdot\frac{i}{i}\left[\frac{\cos(nl)}{2i} - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2}\right] + 2i^n\cos(nl)\cdot\frac{i^2}{i^2}\\
&= 2i^{n+2}\left[\frac{\cos(nl)}{2i^2} - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2i}\right] + \frac{2i^{n+2}\cos(nl)}{i^2}\\
&= 2i^{n+2}\left[\frac{\cos(nl)}{2i^2} - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2i} + \frac{\cos(nl)}{i^2}\right]\\
&= 2i^{n+2}\left[\left(\frac{1}{2i^2} + \frac{1}{i^2}\right)\cos(nl) - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2i}\right]\\
&= 2i^{n+2}\left[\left(\frac{1+2}{2i^2}\right)\cos(nl) - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2i}\right]\\
&= 2i^{n+2}\left[-\left(\frac{3}{2}\right)\cos(nl) - \left(\frac{\sqrt{5}}{2i}\right)\sin(nl)\right]\\
&= 2i^{n+2}\cos(nl+2l) = 2i^{n+2}\cos(n+2)l.
\end{aligned}
$$

Efetuando de modo análogo ao feito anteriormente, iremos subtrair as mesmas equações, obtendo-se

$$\begin{aligned}
L_{n-1} &= L_{n+1} - L_n \\
&= (2i^{n+1}\cos(n+1)l) - (2i^n\cos(nl)) \\
&= (2i^{n+1}\cos(nl+l)) - (2i^n\cos(nl)) \\
&= (2i^{n+1}(\cos(nl)\cos(l) - \sin(l)\sin(nl)) - (2i^n\cos(nl)) \\
&= 2i^{n+1}\left(\cos(nl)\frac{1}{2i} - \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(nl)\right) - (2i^n\cos(nl)) \\
&= \frac{(2i^{n+1})i^{-2}}{i^{-2}}\left(\cos(nl)\frac{1}{2i} - \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(nl)\right) - \frac{(2i^n\cos(nl))i^{-1}}{i^{-1}} \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{\cos(nl)}{2i^{-1}} - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2i^{-2}}\right) - \frac{2i^{n-1}\cos(nl)}{i^{-1}} \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{\cos(nl)}{2i^{-1}} - \frac{\sqrt{5}\sin(nl)}{2i^{-2}} - \frac{\cos(nl)}{i^{-1}}\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\left(\frac{1}{2i^{-1}} - \frac{1}{i^{-1}}\right)\cos(nl) - \frac{\sqrt{5}}{2i^{-2}}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{1-2}{2i^{-1}}\cos(nl) - \frac{\sqrt{5}}{2i^{-2}}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{-1}{2i^{-1}}\cos(nl) - \frac{\sqrt{5}}{2i^{-2}}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{-i}{2}\cos(nl) - \frac{i^2\sqrt{5}}{2}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{-i\cdot i}{2i}\cos(nl) - \frac{i^2\sqrt{5}}{2}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{-i^2}{2i}\cos(nl) - \frac{i^2\sqrt{5}}{2}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\left(\frac{1}{2i}\cos(nl) - \frac{i^2\sqrt{5}}{2}\sin(nl)\right) \\
&= 2i^{n-1}\cos[(n-1)l].
\end{aligned}$$

Estabelecido o Teorema 4.1, é possível então, utilizar as seguintes identidades

$$\sin(nl) = \frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n}, \qquad \cos(nl) = \frac{L_n}{2i^n}, \qquad \text{e} \qquad \tan(nl) = \frac{i\sqrt{5}F_n}{L_n}, \tag{4.7}$$

a fim de transformar fórmulas trigonométricas envolvendo senos, cossenos e tangentes em identidades envoltórias dos números de Fibonacci e de Lucas.

Um exemplo inicial do uso dessa técnica é a inferência da identidade $F_{2n} = F_nL_n$, vista anteriormente, a partir da fórmula para seno do arco duplo.

Exemplo 4.2.

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \Rightarrow \frac{i\sqrt{5}F_{2n}}{2i^{2n}} = 2\frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n}\frac{L_n}{2i^n} \Rightarrow F_{2n} = F_nL_n.$$

Uma aplicação mais elaborada trata-se da obtenção da soma de uma série envolvendo números de Lucas através de uma série telescópica (25).

Exemplo 4.3. Como $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, aplicando-se a fórmula para $\sin(a-b)$ tem-se

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \sin((k+1)\theta - k\theta)\\ &= \sin((k+1)\theta)\cos(k\theta) - \sin(k\theta)\cos((k+1)\theta)\\ &= \cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)(\tan((k+1)\theta) - \tan(k\theta)),\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)} = \tan((k+1)\theta) - \tan(k\theta),$$

e portanto vale a seguinte série telescópica,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\tan((k+1)\theta) - \tan(k\theta)}{\sin(\theta)}\\ &= \frac{(\tan(\theta) - \tan(0)) + (\tan(2\theta) - \tan(\theta)) + (\tan(3\theta) - \tan(2\theta)) + \cdots}{\sin(\theta)}\\ &\quad + \frac{(\tan((n-1)\theta) - \tan((n-2)\theta)) + (\tan(n\theta) - \tan((n-1)\theta))}{\sin(\theta)}\\ &\quad + \frac{(\tan((n+1)\theta) - \tan(n\theta))}{\sin(\theta)}\\ &= \frac{\tan((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.\end{aligned}$$

Por conseguinte, fazendo $\theta = l$ e usando as relações (4.7), tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\cos(kl)\cos((k+1)l)} &= \frac{\tan((n+1)l)}{\sin(l)} \Leftrightarrow\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\frac{L_k}{2i^k}\cdot\frac{L_{k+1}}{2i^{k+1}}} &= \frac{\frac{i\sqrt{5}F_{n+1}}{L_{n+1}}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{4i^{2k+1}}{L_kL_{k+1}} &= \frac{i\sqrt{5}F_{n+1}}{L_{n+1}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{4i^{2k}i}{L_kL_{k+1}} &= \frac{2iF_{n+1}}{L_{n+1}} \Leftrightarrow\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{4(i^2)^ki}{L_kL_{k+1}} &= \frac{2iF_{n+1}}{L_{n+1}} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{4(-1)^k i}{L_k L_{k+1}} &= \frac{2iF_{n+1}}{L_{n+1}} \Leftrightarrow \\
4i \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}} &= \frac{2iF_{n+1}}{L_{n+1}} \Leftrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}} &= \frac{2iF_{n+1}}{4iL_{n+1}} \Leftrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}} &= \frac{1}{2}\frac{F_{n+1}}{L_{n+1}}. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Finalmente, recordando-se de (3.70), verifica-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}. \qquad (4.9)$$

A fim de calcular um valor exato do número imaginário l no Teorema 4.1 iremos usar os fatos de $\sin(l) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\cos(l) = -\frac{i}{2}$ e relembrando-se da identidade de Euler, $e^{zi} = \cos(z) + i\sin(z)$, obtém-se

$$e^{li} = \cos(l) + i\sin(l) = -\frac{i}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{5}}{2}i = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}i = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i. \qquad (4.10)$$

Isto é, temos que $e^{li} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i = -\beta i$, ou ainda, recordando-se que $\alpha\beta = -1$, tem-se

$$e^{li} = -\beta i = -\frac{(-1)}{\alpha}i = \frac{1}{\alpha}i = \alpha^{-1}i, \qquad (4.11)$$

com isto permitindo-se determinar, através do uso do logaritmo natural, um valor complexo de l. Note que, da identidade de Euler vale que $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i(1) = i$, então

$$
\begin{aligned}
e^{li} &= e^{\frac{\pi}{2}i}\alpha^{-1} \Leftrightarrow \\
li &= \frac{\pi}{2}i - \ln(\alpha) \Leftrightarrow \\
(-i)li &= (-i)\frac{\pi}{2}i - (-i)\ln(\alpha) \Leftrightarrow \\
-li^2 &= -\frac{\pi}{2}i^2 + i\ln(\alpha) \Leftrightarrow \\
l &= \frac{\pi}{2} + i\ln(\alpha). \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Por fim, para finalizarmos o uso dos números complexos, iremos mostrar meios de se estender a definição dos números de Fibonacci para índices complexos e também apenas para índices reais. Um modo de se realizar a definição de uma função de Fibonacci para índices complexos seria

$$F_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\alpha^z - \beta^z}{\sqrt{5}}.$$

Contudo, devido a natureza dos números complexos, a equação acima não é tão satisfatória e nem clara. Todavia, é possível reescrever tal equação fazendo-se uso de $\beta = -\frac{1}{\alpha} = -\alpha^{-1}$, $\alpha = e^{ln(\alpha)}$ e $e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i(0) = -1$, obtendo-se

$$F_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\alpha^z - (-\alpha^{-1})^z}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^z - ((-1)^z\alpha^{-z})}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^z - (-1)^z\alpha^{-z}) \Leftrightarrow$$
$$F_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}((e^{\ln(\alpha)})^z - (e^{\pi i})^z(e^{\ln(\alpha)})^{-z}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{z\ln(\alpha)} - e^{z\pi i}e^{-z\ln(\alpha)}). \tag{4.13}$$

Na última linha definiu-se uma função cuja qual estende os números de Fibonacci para os índices complexos. Entretanto, se $z \in \mathbb{R}$ e não inteiro a função $F_{\mathbb{C}}(z)$ resulta em um número imaginário. Um meio de definir, a partir de (4.13), uma função dos reais nos reais que estenda F_n, é tomar a parte real de $F_{\mathbb{C}}(z)$, obtendo assim, para x real,

$$F_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^x - \cos(x\pi)\alpha^{-x}). \tag{4.14}$$

Concluindo-se, é importante ressaltar que $F_{\mathbb{R}}(z)$ e $F_{\mathbb{C}}(z)$ são de fato extensões dos números de Fibonacci, pois se n é inteiro vale que $e^{n\pi i} = \cos(n\pi) = (-1)^n$ e como $\alpha = -\frac{1}{\beta} = -\beta^{-1}$, pode-se verificar que

$$\begin{aligned}F_{\mathbb{C}}(n) = F_{\mathbb{R}}(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-1)^n\alpha^{-n})\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-1)^n(-\beta^{-1})^{-n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-1)^n(-1)^{-n}\beta^n)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

4.1 Uma Abordagem Trigonométrica para a Fórmula de Binet e a Sequência de Fibonacci

Para concluir tal conteúdo, veremos a seguir um resultado trigonométrico elementar cujo qual relaciona as constantes α e β aos cossenos dos ângulos de 36° e 108°.

Teorema 4.4.

$$i)\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \tag{4.15}$$
$$ii)\cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \tag{4.16}$$

Prova: Os itens $i)$ e $ii)$ serão demonstrados de maneira simultânea. Das identidades para seno e cosseno de uma soma pode-se inferir

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\
&= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\
&= 2\cos(a)\cos(b),\\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a),\\
\sin(180^\circ-a) &= \sin(180^\circ)\cos(a)-\sin(a)\cos(180^\circ)\\
&= 0\cdot\cos(a)-\sin(a)(-1)=\sin(a),\\
-\sin(a-90^\circ) &= -[\sin(a)\cos(90^\circ)-\sin(90^\circ)\cos(a)]\\
&= -\sin(a)\cos(90^\circ)+\sin(90^\circ)\cos(a)\\
&= -\sin(a)\cdot 0+1\cdot\cos(a)=\cos(a).
\end{aligned}$$

Fazendo-se uso das quatro fórmulas destacadas anteriormente tem-se

$$\begin{aligned}
\cos(108^\circ)+\cos(36^\circ) &= \cos(72^\circ+36^\circ)+\cos(72^\circ-36^\circ)\\
&= 2\cos(72^\circ)\cos(36^\circ)\\
&= 2\cos(72^\circ)\cos(36^\circ)\cdot\frac{2\sin(36^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{4\cos(72^\circ)\cos(36^\circ)\sin(36^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{2\cos(72^\circ)[2\cos(36^\circ)\sin(36^\circ)]}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{2\cos(72^\circ)\sin(2\cdot 36^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{2\cos(72^\circ)\sin(72^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{\sin(2\cdot 72^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{\sin(144^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{\sin(180^\circ-36^\circ)}{2\sin(36^\circ)}\\
&= \frac{\sin(36^\circ)}{2\sin(36^\circ)}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\cos(108^\circ)\cos(36^\circ) &= -\sin(108^\circ-90^\circ)\cos(36^\circ)\\
&= -\sin(18^\circ)\cos(36^\circ)\\
&= -\sin(18^\circ)\cos(36^\circ)\cdot\frac{4\cos(18^\circ)}{4\cos(18^\circ)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-4\sin(18^\circ)\cos(18^\circ)\cos(36^\circ)}{4\cos(18^\circ)} \\
&= \frac{-2\cdot[2\cdot\sin(18^\circ)\cos(18^\circ)]\cos(36^\circ)}{4\cos(18^\circ)} \\
&= \frac{-2\sin(36^\circ)\cos(36^\circ)}{4\cos(18^\circ)} \\
&= \frac{-[\sin(2\cdot 36^\circ)]}{4\cos(18^\circ)} \\
&= \frac{-\sin(72^\circ)}{4\cos(18^\circ)} \\
&= \frac{-\sin(72^\circ)}{4[-\sin(18^\circ-90^\circ)]} \\
&= \frac{-\sin(72^\circ)}{4[-\sin(-72^\circ)]} \\
&= \frac{-\sin(72^\circ)}{4\sin(72^\circ)} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\cos(36^\circ)$ e $\cos(108^\circ)$ são as raízes positiva e negativa da equação

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (2x) - 1 = 0,$$

estabelecendo-se tal teorema, dado que as raízes dessa equação são

$$x = \frac{2\pm\sqrt{20}}{2(4)} = \frac{2\pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4} = \frac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{2}.$$

Finalmente, fazendo-se uso do teorema anterior é possível reescrever a fórmula de Binet para F_n, assim como realizou o matemático W. Hope-Jones em 1921 (15),

$$F_n = \frac{2^n}{\sqrt{5}}(\cos^n(36^\circ) - \cos^n(108^\circ)). \tag{4.17}$$

4.2 Novas abordagens para cálculos e testes de F_n e L_n

As identidades de Binet para os números de Fibonacci e de Lucas expressam esses números essencialmente através da subtração e da soma de potências de α e β, ou seja,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Dado que $|\beta| < 1$ tem-se que $|\beta|^n$ se torna cada vez menor à medida que n cresce, como pode-se observar na lista das primeiras potências de $|\beta|$, abaixo:

$$|\beta|^1 \approx 0,61803398874989$$
$$|\beta|^2 \approx 0,38196601125010$$
$$|\beta|^3 \approx 0,23606797749978$$
$$|\beta|^4 \approx 0,14589803375031$$
$$|\beta|^5 \approx 0,09016994374947$$
$$|\beta|^6 \approx 0,05572809000084$$
$$|\beta|^7 \approx 0,03444185374863$$
$$|\beta|^8 \approx 0,02128623625220$$
$$|\beta|^9 \approx 0,01315561749642$$
$$|\beta|^{10} \approx 0,00813061875578$$

Os dados acima virão a ser utilizados com o objetivo de se obter aproximações extremamente precisas dos F_n e L_n. Porém, antes de prosseguir, é necessário introduzir uma nova notação. O símbolo $\lfloor x \rceil$ irá ser usado para denotar o inteiro mais próximo de x. Apesar deste símbolo não ser definido para valores racionais que estejam exatamente no meio do caminho entre dois inteiros, como $\lfloor \frac{1}{2} \rceil$, aqui o símbolo $\lfloor x \rceil$ só será usado com $x \in \mathbb{I}$, o que evitará quaisquer transtornos.

Teorema 4.5.

$$F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right\rceil, \qquad n \geq 1. \tag{4.18}$$

Prova: Por (3.20), temos que

$$\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = (\alpha^n)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\alpha^{2n}}{5} \in \mathbb{I},$$

note que,

$$\sqrt{\frac{\alpha^{2n}}{5}} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$$

e portanto, $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \in \mathbb{I}$.

Para demonstrar o teorema, note que, para $n \geq 1$,

$$\left|F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\beta^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{|\beta|}{2} < \frac{1}{2}.$$

A identidade análoga a (4.18) para os números de Lucas é mais interessante, dado que mostra como esses números se comportam quase como se fossem potências de α.

Teorema 4.6.

$$L_n = \lfloor \alpha^n \rceil, \qquad n \geq 2. \tag{4.19}$$

Prova: Para $n \geq 2$, a identidade (3.20) mostra que α^n é irracional. Fazendo-se uso da fórmula de Binet para os números de Lucas tem-se,

$$|L_n - \alpha^n| = |\alpha^n + \beta^n - \alpha^n| = |\beta|^n \leq |\beta|^2 < \frac{1}{2}.$$

A tabela abaixo contém os primeiros valores das aproximações $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ e α^n.

n	F_n	$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$	L_n	α^n
1	1	0,72360680	1	1,61803399
2	1	1,17082039	3	2,61803399
3	2	1,89442719	4	4,23606798
4	3	3,06524758	7	6,85410197
5	5	4,95967478	11	11,09016994
6	8	8,02492236	18	17,94427191
7	13	12,98459713	29	29,03444185
8	21	21,00951949	47	46,97871376
9	34	33,99411663	76	76,01315562
10	55	55,00363612	123	122,99186938
11	89	88,99775275	199	199,00502500
12	144	144,00138888	322	321,99689438
13	233	232,99914163	521	521,00191938
14	377	377,00053050	843	842,99881376
15	610	609,99967213	1364	1364,00073314
16	987	987,00020263	2207	2206,99954690
17	1597	1596,99987477	3571	3571,00028003
18	2584	2584,00007740	5778	5777,99982693
19	4181	4180,99995216	9349	9349,00010696
20	6765	6765,00002956	15127	15126,99993389
21	10946	10945,99998173	24476	24476,00004086
22	17711	17711,00001129	39603	39602,99997475
23	28657	28656,99999302	64079	64079,00001561
24	46368	46368,00000432	103682	103681,99999036
25	75025	75024,99999734	167761	167761,00000596
26	121393	121393,00000166	271443	271442,99999632
27	196418	196417,99999900	439204	439204,00000228
28	317811	317811,00000066	710647	710646,99999859
29	514229	514228,99999966	1149851	1149851,00000087

Tabela 2 – Números de Lucas e de Fibonacci e suas aproximações.

Observe que, como $F_3 = 2$, $F_5 = 5$ e $61|F_{15}$, pelo resultado, provado anteriormente, cujo qual diz que $F_n|F_m$ se e somente se $n|m$, para $m \geq n \geq 3$ naturais, temos que nenhum número de Fibonacci é uma potência de 10. Sendo assim, a aproximação $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ para o número F_n nunca está contida num intervalo do tipo $\left[10^k - \frac{1}{2}, 10^k\right]$, e portanto possui a mesma quantidade de dígitos antes da vírgula que a quantidade de dígitos do número F_n. O símbolo $\lfloor x \rfloor$ irá ser usado para denotar o maior inteiro menor ou igual a x. Então, por intermédio da função $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$, cuja qual conta a quantidade de dígitos antes da vírgula do número real $x \geq 1$, obtém-se

$$D(F_n) = \lfloor n \log_{10} \alpha - \log_{10} \sqrt{5} \rfloor + 1, \qquad n \geq 2. \tag{4.20}$$

De modo similar, por $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$, pode-se concluir que nenhum L_n é múltiplo de 5, logo

$$D(L_n) = \lfloor n \log_{10} \alpha \rfloor + 1, \qquad n \geq 2. \tag{4.21}$$

As identidades (4.20) e (4.21) são identidades exatas para obtenção da quantidade de dígitos dos números de Fibonacci e Lucas embasadas nas aproximações $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ e α^n e, como $\log_{10} \alpha \approx 0,2089$ e $\log_{10} \sqrt{5} \approx 0,3494$, podemos notar que a cada cinco posições tais números aumentam em um dígito. Ainda, tais identidades nos permite observar também que os números de Lucas têm uma quantidade de dígitos igual ou um dígito maior que os números de Fibonacci, pois nota-se que $D(L_n) - D(F_n) \leq 1$.

Fazendo-se uso de aproximações é possível calcular o termo sucessor e o antecessor dos números de Fibonacci e de Lucas, sem que se tenha conhecimento do valor do índice n.

Teorema 4.7.

$$i) F_{n+1} = \lfloor \alpha F_n \rceil, \quad n \geq 2. \tag{4.22}$$

$$ii) L_{n+1} = \lfloor \alpha L_n \rceil, \quad n \geq 4. \tag{4.23}$$

$$iii) F_{n-1} = \left\lfloor \frac{F_n}{\alpha} \right\rceil, \quad n \geq 2. \tag{4.24}$$

$$iv) L_{n-1} = \left\lfloor \frac{L_n}{\alpha} \right\rceil, \quad n \geq 4. \tag{4.25}$$

Prova: Utilizando-se (3.17) e (3.18) e verificando-se qual valor de n faz as equações em módulo menores do que meio, dado que $|\beta|^k$ é decrescente temos

$$\begin{aligned}
|F_{n+1} - \alpha F_n| &= |\beta|^n \leq \frac{1}{2}, && n \geq 2,\\
|L_{n+1} - \alpha L_n| &= \sqrt{5}|\beta|^n \leq \frac{1}{2}, && n \geq 4,\\
\left|\frac{F_n}{\alpha} - F_{n-1}\right| &= \frac{|\beta|^{n-1}}{\alpha} \leq \frac{1}{2}, && n \geq 2,\\
\left|\frac{L_n}{\alpha} - L_{n-1}\right| &= \sqrt{5}\frac{|\beta|^{n-1}}{\alpha} \leq \frac{1}{2}, && n \geq 4.
\end{aligned}$$

Um fato interessante é que já era possível obter as fórmulas para F_{n+1} e L_{n+1} em função dos seus termos antecedentes, como feito em (25), fazendo-se uso dos resultados já provados anteriormente:

$$\begin{aligned} 2F_{n+1} &= L_n + F_n, \\ 2L_{n+1} &= L_n + 5F_n, \\ L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n. \end{aligned}$$

Facilmente vemos que combinando-se essas três identidades pode-se escrever

$$F_{n+1} = \frac{L_n + F_n}{2} = \frac{F_n + L_n}{2} = \frac{F_n + \sqrt{4(-1)^n + 5F_n^2}}{2} \tag{4.26}$$

$$L_{n+1} = \frac{L_n + 5F_n}{2} = \frac{L_n + \sqrt{5(-4(-1)^n + L_n^2)}}{2} = \frac{L_n + \sqrt{5(L_n^2 - 4(-1)^n)}}{2}. \tag{4.27}$$

No resultado a seguir iremos mostrar como calcular F_n de L_n assim como sua recíproca.

Teorema 4.8. *Se $n \geq 3$, então:*

$$i) F_n = \left\lfloor \frac{L_n}{\sqrt{5}} \right\rceil. \tag{4.28}$$

$$ii) L_n = \lfloor \sqrt{5} F_n \rceil. \tag{4.29}$$

Prova: Da identidade (3.21), tem-se

$$L_n - \sqrt{5}F_n = 2\beta^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L_n}{\sqrt{5}} - F_n = \frac{2\beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Dado que,

$$\frac{2|\beta|^n}{\sqrt{5}} < 2|\beta|^n < \frac{1}{2}, \qquad n \geq 3,$$

conclui-se então tal demonstração.

Por fim, serão visualizados dois novos testes para F_n e L_n baseados em aproximações. Observe que, por (4.18),

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_n < \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}, \qquad n \geq 1. \tag{4.30}$$

Note que a identidade (4.18) pode ser reescrita por intermédio da função maior inteiro menor, denotada por $\lceil . \rceil$, e da função menor inteiro maior, denotada por $\lfloor . \rfloor$. Isto é, são verdadeiras, e equivalentes à (4.18), as equações

$$F_n = \left\lceil \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right\rceil, \qquad F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \tag{4.31}$$

Ainda, da identidade (4.18) juntamente com a inequação (4.30) é possível verificar

$$\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} < F_n < \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}, \qquad n \geq 1, \tag{4.32}$$

dado que F_n forma uma sequência crescente e os extremos da desigualdade acima são números que distam menos de uma unidade respectivamente de F_{n-1} e F_{n+1}. Logo, facilmente vemos que é simples demonstrar a inequação (4.32) fazendo-se uso do método da indução matemática, e de maneira análoga mostrar também por indução a inequação a seguir,

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{5}} < F_n < \frac{\alpha^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{5}}, \qquad n \geq 2. \tag{4.33}$$

Logo, multiplicando (4.33) por $\sqrt{5}$ e tomando o logaritmo na base α pode-se descrever um fato relevante a despeito do índice do número F_n,

$$n = \lfloor \log_\alpha \sqrt{5} F_n \rceil, \qquad n \geq 2. \tag{4.34}$$

Similarmente, por intermédio de um desenvolvimento análogo, pode-se obter

$$n = \lfloor \log_\alpha L_n \rceil, \qquad n \geq 2. \tag{4.35}$$

Observe que combinando-se as identidades (4.18) com (4.34) e (4.19) com (4.35) a fim de se obter testes úteis para F_n e L_n, ou seja, dado $x \geq 2$ natural, calcula-se o índice n correspondente a x, por (4.18) ou (4.19), e verifica-se se x é igual a F_n ou L_n por (4.34) ou (4.35).

Teste 4.9. Se $x \in \mathbb{N}$, então:

a) x é um número de Fibonacci se e somente se

$$x = \left\lfloor \frac{\alpha^{\lfloor \log_\alpha \sqrt{5} x \rceil}}{\sqrt{5}} \right\rceil.$$

b) x é um número de Lucas se e somente se

$$x = \lfloor \alpha^{\lfloor \log_\alpha x \rceil} \rceil.$$

Para concluir, será exposto sem demonstração um teste para F_n, baseado na teoria das aproximações diofantinas, retirado de (16), cujo qual foi publicado por Möbius em 1998 (25). De maneira equivalente pode-se obter a demonstração do teste correspondente para os números de Lucas podendo esta ser encontrada em (11).

Teste 4.10. Se $x \in \mathbb{N}$, então:

a) x é um número de Fibonacci se e somente se o intervalo $\left[\alpha x - \frac{1}{x}, \alpha x + \frac{1}{x}\right]$ contém um inteiro.

b) x é um número de Lucas se e somente se o intervalo $\left[\frac{\alpha}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{x}, \frac{\alpha}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{x}\right]$ contém um inteiro.

5 Álgebra Linear e Matrizes: Uma Nova Perspectiva sobre as Sequências de Fibonacci e Lucas

Neste tópico iremos nos debruçar sobre os números de Fibonacci e de Lucas fazendo-se uso de definições e propriedades da álgebra linear. Inicialmente, será definida uma relação entre tais números e determinadas matrizes no espaço $M_2(\mathbb{R})$. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x + y)$. Facilmente, podemos ver a analogia presente entre a relação de recorrência de uma sequência generalizada de Fibonacci e a lei dessa transformação. Note que, aplicando-se sucessivamente T, a partir de $(x_0, y_0) = (0, 1)$, tem-se

$$T^n(x_0, y_0) = (F_n, F_{n+1}). \tag{5.1}$$

Considerando-se a base canônica de $\mathbb{R}^2$ $\{(1, 0), (0, 1)\}$, e efetuando-se o cálculo da matriz de transformação linear anterior obtemos

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(1, 0) = (0, 1) \\ T(e_2) &= T(0, 1) = (1, 1 + 0) = (1, 1), \end{aligned}$$

cujo resultado é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a qual será denotada pela letra Q (13). Sendo assim podemos reescrever (5.1) como uma multiplicação entre vetores e matrizes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Note que, como a matriz Q é invertível, sua inversa, denotada por Q^{-1}, é obtida através de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ a + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \\ b + d = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \end{cases}$$

Logo, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sendo assim, por (5.2) e fazendo-se uso de Q^{-1}, obtém-se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_n + F_{n+1} \\ F_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} - F_n \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Na seção a seguir serão realizadas investigações e aprofundamentos a despeito da matriz Q, suas potências e sua inversa.

5.1 Matrizes associadas às sequências de Fibonacci e de Lucas

A seguir serão mostrados dois teoremas, cujos quais tratam-se dos mais notórios sendo a partir deles provados muitas relações sobre os números de Fibonacci e de Lucas.

Teorema 5.1 (Matriz de Fibonacci)**.** *Para todo n inteiro,*

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n. \tag{5.5}$$

Prova: Note que,

$$Q^0 = \begin{pmatrix} F_{0-1} & F_0 \\ F_0 & F_{0+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-1} & F_0 \\ F_0 & F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

assim para $n = 0$ a relação (5.5) é válida. Suponha que (5.5) seja verdadeira para n, ou seja,

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando-se tal relação respectivamente por Q e Q^{-1} obtém-se

$$Q^nQ = Q^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} Q^nQ^{-1} = Q^{n-1} &= \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{n-1} + F_n & F_{n-1} \\ -F_n + F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n - F_{n-1} & F_{n-1} \\ F_{n+1} - F_n & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Isso mostra que se a relação (5.5) é verdadeira para n, também vale para $n - 1$ e $n + 1$.

Portanto, tal relação é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 5.2 (Matriz de Lucas)**.** *Para todo n inteiro,*

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n . \tag{5.6}$$

Prova: Sabe-se da sequência de Lucas que $L_{-1} = -1$, $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Verificando-se para $n = 0$ a identidade (5.6) tem-se

$$\begin{pmatrix} L_{-1} & L_0 \\ L_0 & L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Portanto, tal identidade é verdadeira para $n = 0$. Suponha que a relação (5.6) seja válida para n, ao multiplicarmos tal relação respectivamente por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e por $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} , \\
\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} L_{n-2} & L_{n-1} \\ L_{n-1} & L_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} .
\end{aligned}$$

Isto é, se a relação (5.6) é válida para n, ela é válida para $n-1$ e $n+1$, sendo portanto válida para todo n inteiro.

É válido ressaltar que as sequências matriciais denotadas por

$$x_n := \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad x_n := \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}$$

tratam-se de sequências generalizadas de Fibonacci dado que $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

5.2 Identidades via matrizes 2×2

As identidades (5.5) e (5.6) denotam uma relevante conexão entre F_n, L_n e as potências inteiras da matriz Q. Tal conexão nos leva a um vasto número de relações sobre os números de Fibonacci e de Lucas cujas quais podem ser obtidas por intermédio das propriedades das matrizes, sendo algumas delas vistas adiante.

5.2.1 Identidades de Cassini para F_n e L_n

Efetuando-se o cálculo dos determinantes em ambos os lados de (5.5) tem-se

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^n \Leftrightarrow \\ (F_{n-1}F_{n+1} - F_nF_n) &= (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)^n \Leftrightarrow \\ F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Efetuando-se o cálculo dos determinantes em ambos os lados de (5.6) tem-se

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^n \Leftrightarrow \\ (L_{n-1}L_{n+1} - L_nL_n) &= (-1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)^n \Leftrightarrow \\ L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 &= -5(-1)^n. \end{aligned} \tag{5.8}$$

5.2.2 Os números de Lucas em função dos números de Fibonacci

Efetuando-se a substituição de (5.5) em (5.6) obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \qquad (5.9) \\ &= \begin{pmatrix} -F_{n-1} + 2F_n & -F_n + 2F_{n+1} \\ 2F_{n-1} + F_n & 2F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2F_n - F_{n-1} & 2F_{n+1} - F_n \\ 2F_{n-1} + F_n & 2F_n + F_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ao considerar apenas a terceira entrada na equação anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} L_n &= 2F_{n-1} + F_n = F_n + F_{n-1} + F_{n-1} \Leftrightarrow \\ L_n &= F_{n+1} + F_{n-1}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

5.2.3 Os números de Fibonacci em função dos números de Lucas

Ao multiplicar (5.9) em ambos os lados por $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -L_{n-1}+2L_n & -L_n+2L_{n+1} \\ 2L_{n-1}+L_n & 2L_n+L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(-1)+2(2) & -1(2)+2(1) \\ 2(-1)+1(2) & 2(2)+1(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2L_n-L_{n-1} & 2L_{n+1}-L_n \\ L_n+2L_{n-1} & L_{n+1}+2L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+2 \\ -2+2 & 4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2L_n-L_{n-1} & 2L_{n+1}-L_n \\ L_n+2L_{n-1} & L_{n+1}+2L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2L_n-L_{n-1} & 2L_{n+1}-L_n \\ L_n+2L_{n-1} & L_{n+1}+2L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5F_{n-1} & 5F_n \\ 5F_n & 5F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ao considerar apenas a terceira entrada na igualdade anterior tem-se

$$5F_n = L_n + L_{n-1} + L_{n-1} \Leftrightarrow$$
$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}. \tag{5.11}$$

5.2.4 Adição, subtração e a diferença de quadrados de F_n e L_n

Ao adicionar as identidades (5.5) e (5.6), temos

$$\begin{pmatrix} F_{n-1}+L_{n-1} & F_n+L_n \\ F_n+L_n & F_{n+1}+L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} F_{n-1}+L_{n-1} & F_n+L_n \\ F_n+L_n & F_{n+1}+L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} F_{n-1}+L_{n-1} & F_n+L_n \\ F_n+L_n & F_{n+1}+L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} F_{n-1}+L_{n-1} & F_n+L_n \\ F_n+L_n & F_{n+1}+L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2F_n & 2F_{n-1}+2F_n \\ 2F_{n+1} & 2F_n+2F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ao considerar apenas a terceira entrada na igualdade anterior tem-se

$$F_n + L_n = 2F_{n+1}. \tag{5.12}$$

Ao subtrairmos as mesmas identidades, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_{n-1}-F_{n-1} & L_n-F_n \\ L_n-F_n & L_{n+1}-F_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \\ &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n. \end{aligned}$$

Substituindo (5.5) na identidade acima temos,

$$\begin{pmatrix} L_{n-1}-F_{n-1} & L_n-F_n \\ L_n-F_n & L_{n+1}-F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} L_{n-1}-F_{n-1} & L_n-F_n \\ L_n-F_n & L_{n+1}-F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2F_{n-1}+2F_n & -2F_n+2F_{n+1} \\ 2F_{n-1} & 2F_n \end{pmatrix}.$$

Ao considerar apenas a terceira entrada da identidade acima, tem-se

$$L_n - F_n = 2F_{n-1}. \tag{5.13}$$

Ao multiplicarmos as identidades (5.12) e (5.13), temos

$$\begin{aligned}(L_n+F_n)(L_n-F_n) &= 2F_{n+1}2F_{n-1} \Leftrightarrow \\ L_n^2 - F_n^2 &= 4F_{n-1}F_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

5.2.5 Mais algumas identidades

Ao multiplicar (5.5) indexada respectivamente em m e n verifica-se que

$$\begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} F_{m-1}F_{n-1}+F_mF_n & F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1} \\ F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n & F_mF_n+F_{m+1}F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{m+n} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} F_{m-1}F_{n-1}+F_mF_n & F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1} \\ F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n & F_mF_n+F_{m+1}F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n-1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n+1} \end{pmatrix}.$$

Ao considerar apenas a terceira entrada da igualdade acima temos

$$F_{m+n} = F_mF_{n-1} + F_{m+1}F_n. \tag{5.15}$$

De maneira análoga, ao multiplicarmos (5.6) indexada respectivamente em m e n tem-se

$$\begin{pmatrix} L_{m-1} & L_m \\ L_m & L_{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} L_{m-1}L_{n-1}+L_mL_n & L_{m-1}L_n+L_mL_{n+1} \\ L_mL_{n-1}+L_{m+1}L_n & L_mL_n+L_{m+1}L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{m+n} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} L_{m-1}L_{n-1}+L_mL_n & L_{m-1}L_n+L_mL_{n+1} \\ L_mL_{n-1}+L_{m+1}L_n & L_mL_n+L_{m+1}L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{m+n-1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} L_{m-1}L_{n-1}+L_mL_n & L_{m-1}L_n+L_mL_{n+1} \\ L_mL_{n-1}+L_{m+1}L_n & L_mL_n+L_{m+1}L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_{m+n-1}+2L_{m+n} & -L_{m+n}+2L_{m+n+1} \\ 2L_{m+n-1}+L_{m+n} & 2L_{m+n}+L_{m+n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando-se a terceira entrada da igualdade acima, juntamente com o uso da relação de recorrência e com a identidade $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$ tem-se

$$\begin{aligned}
L_m L_{n-1} + L_{m+1} L_n &= 2L_{m+n-1} + L_{m+n} \\
&= L_{m+n-1} + L_{m+n-1} + L_{m+n} \\
&= L_{m+n-1} + L_{m+n+1} \Leftrightarrow \\
L_m L_{n-1} + L_{m+1} L_n &= 5F_{m+n} \Leftrightarrow \\
5F_{m+n} &= L_m L_{n-1} + L_{m+1} L_n. \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

5.2.6 Uma ponte direta entre F_n e L_n

Ao combinarmos (5.7) e (5.14) tem-se,

$$\begin{aligned}
L_n^2 - F_n^2 &= 4[(-1)^n + F_n^2] \\
&= 4(-1)^n + 4F_n^2 \Leftrightarrow \\
L_n^2 - F_n^2 - 4F_n^2 &= 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n. \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

6 Aplicações

Neste capítulo, iremos explorar a aplicabilidade das sequências de Fibonacci e de Lucas no contexto da Matemática escolar, focando, inicialmente, na utilização de sequências numéricas de forma geral, destacando sua relevância em diferentes etapas da educação básica e sugerindo formas de exploração pedagógica desses conceitos. Além disso, discutiremos como as demonstrações podem ser vivenciadas em sala de aula e de que maneira essas ideias se relacionam com as competências matemáticas exigidas no Ensino Médio.

Ainda, ao término deste capítulo, apresentaremos algumas questões de concursos e problemas práticos que demonstram como as sequências podem ser integradas ao currículo escolar, estimulando o raciocínio lógico e a habilidade de resolver problemas nos alunos.

6.1 Sequências Numéricas ao Longo da Escolarização

O estudo das sequências numéricas é essencial ao longo da formação matemática dos estudantes, pois desenvolve habilidades de reconhecimento de padrões, generalização e modelagem matemática. Este estudo pode ser estruturado progressivamente ao longo da educação básica, contemplando abordagens adaptadas a diferentes níveis de ensino:

i) **Ensino Fundamental I (anos iniciais):** Introdução às sequências numéricas através de atividades concretas e pictóricas. Os alunos podem explorar padrões numéricos simples, como sequências formadas por repetições de figuras, contagem de objetos e relações de adição e subtração.

ii) **Ensino Fundamental II (anos finais):** Introdução da noção de função recorrente e regularidades numéricas. Os alunos podem trabalhar com sequências aritméticas e geométricas, explorando padrões, diferenças entre termos consecutivos e propriedades matemáticas associadas. As conexões com a Geometria também são incentivadas, como no estudo de mosaicos e formas naturais.

iii) **Ensino Médio:** Desenvolvimento de abordagens mais formais, incluindo demonstrações matemáticas, uso da fórmula de Binet para sequências recorrentes, aplicações em matrizes e conexões interdisciplinares. Os alunos podem utilizar tecnologia e modelagem para aprofundar o entendimento e aplicar os conceitos em problemas do mundo real.

6.1.1 Estratégias para o Ensino das Sequências

Para tornar o ensino das sequências numéricas mais atrativo e significativo, diversas estratégias podem ser empregadas:

i) **Atividades exploratórias:** Os alunos podem identificar padrões em elementos da natureza, como arranjos de sementes em girassóis, formações de cristais e organização de folhas em caules. O uso de mosaicos geométricos baseados na espiral de Fibonacci permite a visualização das propriedades matemáticas dessas sequências.

ii) **Desafios e jogos:** Problemas matemáticos instigantes e jogos de lógica são eficazes para estimular o raciocínio dos alunos. Desafios podem envolver a previsão de termos futuros da sequência, a identificação de padrões ocultos e a resolução de quebra-cabeças matemáticos.

iii) **Tecnologias educacionais:** Ferramentas digitais como GeoGebra, Python e planilhas eletrônicas permitem a geração automática de sequências, análise de padrões e criação de visualizações gráficas interativas. Isso possibilita que os alunos compreendam a estrutura matemática subjacente de forma dinâmica.

iv) **Conexão interdisciplinar:** O estudo das sequências numéricas pode ser relacionado com diversas áreas do conhecimento. Na arte, podem ser analisadas proporções baseadas na Sequência de Fibonacci em pinturas e esculturas. Na biologia, a disposição de sementes, conchas e estruturas corporais de animais pode ser investigada. Na economia, as sequências numéricas são utilizadas na modelagem financeira e previsão de tendências de mercado.

6.1.2 Demonstrações e Experimentos em Sala de Aula

As demonstrações matemáticas podem ser vivenciadas de forma concreta por meio das seguintes abordagens:

i) **Construção geométrica:** A espiral de Fibonacci pode ser desenhada utilizando régua e compasso, permitindo a conexão entre Geometria e sequências numéricas. Essa atividade favorece a compreensão da expansão logarítmica e do crescimento exponencial.

ii) **Provas algébricas:** Os alunos podem explorar a indução matemática para provar propriedades das sequências, como a identidade de Cassini e a fórmula de Binet. Isso fortalece o pensamento matemático e a compreensão dos padrões numéricos.

iii) **Matrizes e determinantes:** O uso de matrizes permite a compreensão estrutural das sequências, mostrando como a multiplicação matricial gera termos sucessivos.

Esse enfoque pode ser ampliado para incluir diagonalização de matrizes e cálculo de autovalores.

iv) **Análise computacional de crescimento exponencial:** Com linguagens de programação como Python e R, os alunos podem simular o crescimento das sequências, comparar diferentes progressões e modelar situações reais, como população de espécies ou tendências econômicas.

6.1.3 Relação com as Competências do Ensino Médio

O estudo das sequências numéricas no Ensino Médio contribui para o desenvolvimento das seguintes competências matemáticas:

i) **Competência 1:** Compreensão e aplicação de conceitos matemáticos em contextos cotidianos e acadêmicos.

ii) **Competência 2:** Desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico, favorecendo a análise de padrões matemáticos.

iii) **Competência 3:** Capacidade de resolver problemas, elaborar argumentações matemáticas e justificar resultados obtidos.

iv) **Competência 4:** Uso de tecnologias para modelagem, exploração e análise de sequências matemáticas em aplicações diversas.

6.2 Problemas e Questões de Concurso

Conforme visto ao longo desta monografia, as sequências numéricas, em especial a sequência de Fibonacci e sequência de Lucas, oferecem um campo fértil para o desenvolvimento do pensamento lógico e da resolução de problemas. Nesta seção, serão apresentados problemas e questões de concurso que exploram essas sequências, permitindo sua aplicação no ambiente escolar de forma a promover o raciocínio lógico e a investigação matemática.

Problema 6.1. Um criador de coelhos percebeu que a quantidade de pares de coelhos em seu criadouro segue a sequência de Fibonacci, onde cada novo mês a quantidade de pares é a soma dos dois meses anteriores. Se ele começou com 1 par e, ao final do 7º mês, deseja doar metade dos coelhos que tem, quantos pares ele doará?
Dica: A sequência de Fibonacci começa com $F_1 = F_2 = 1$.

Solução: Calculando-se os primeiros termos até o 7º mês chega-se a $F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$. Sendo assim, após sete meses haverão 13 pares de coelhos. Se ele doar metade, ele irá doar $\frac{13}{2} = 6,5$. Dado o fato de que ele só pode doar um número inteiro de pares, ele irá doar 6 pares de coelhos.

Problema 6.2. A sequência de Lucas é definida por:

$$L_1 = 1, \qquad L_2 = 3, \qquad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \forall\ n \geq 3.$$

Qual é a soma dos cinco primeiros números da sequência de Lucas?

Solução: Como já foi informado o valor dos dois primeiros termos, resta calcular o valor de: L_3, L_4 e L_5. Sendo assim temos,

$$L_3 = L_2 + L_1 = 4,$$
$$L_4 = L_3 + L_2 = 7,$$
$$L_5 = L_4 + L_3 = 11.$$

Agora, somando-se $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ obtemos como resultado 26.

Problema 6.3. Na sequência de Lucas, o 6º termo é 18 e o 7º termo é 29. Qual é a diferença entre o quadrado do 7º termo e o quadrado do 6º termo?

Solução: Calculando-se o quadrado dos termos dados obtemos:

$$L_6^2 = 18^2 = 324,$$
$$L_7^2 = 29^2 = 841.$$

Por fim, fazendo-se a diferença entre os termos obtemos como resposta do problema $841 - 324 = 517$.

Problema 6.4. Sabemos que na sequência de Fibonacci, alguns números são múltiplos de 5. Qual é o menor termo da sequência de Fibonacci, maior que 1, que é múltiplo de 5?

Solução: Sabe-se que os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Observe que, na sequência acima os primeiros múltiplos de 5 são 5 e 55. Portanto, o menor termo maior que 1 que é múltiplo de 5 é 5.

Problema 6.5. A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Lucas se aproxima de um número especial chamado razão áurea (ϕ). Calcule a razão $\dfrac{L_9}{L_8}$ e aproxime o resultado para duas casas decimais.

Solução: Calculando-se os termos L_8 e L_9 chega-se a:

$$L_8 = 47 \qquad \text{e} \qquad L_9 = 76.$$

Ao calcularmos a razão obtemos

$$\frac{L_9}{L_8} = \frac{76}{47} \approx 1,617.$$

Arredondando-se para duas casas decimais tem-se $1,62$.

Questão 6.6. (IME - 2008) Uma série de Fibonacci é uma sequência de valores definida da seguinte maneira:
- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, $T_1 = T_2 = 1$.
- Cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois termos anteriores, isto é: $T_n = T_{n-2} + T_{n-1}$.

Se $T_{18} = 2584$ e $T_{21} = 10946$ então T_{22} é igual a:

a) 12225 b)13530 c)17711 d)20412 e)22121

Solução: Utilizando-se a relação de recorrência fornecida, obtemos

$$T_{22} = T_{21} + T_{20}$$

Sabe-se que

$$T_{20} = T_{19} + T_{18} \qquad \text{e} \qquad T_{19} = T_{21} - T_{20}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} T_{20} &= T_{19} + 2584 \\ &= T_{21} - T_{20} + 2584 \\ 2T_{20} &= 10946 + 2584 \\ T_{20} &= \frac{13530}{2} = 6765. \end{aligned}$$

Logo, $T_{22} = 10946 + 6765 = 17711$.

Questão 6.7. (ESAF – 2010) A partir da lei de formação da sequência $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ calcule o valor mais próximo do quociente entre o 11° e o 10° termo.

a) 1,732 b)1,667 c)1,618 d)1,414 e)1,5

Solução: Sabe-se que ao usar a relação de recorrência obtemos $F_{10} = 55$ e $F_{11} = 89$. Ao realizarmos o quociente entre tais termos obtemos

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} \approx 1,618.$$

Portanto, o resultado é $1,618$.

Questão 6.8. (FDC – 2015) A sequência de números $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$ é conhecida como sequência de Fibonacci. O $14^{\underline{o}}$ termo desta sequência é:

a) 233 b)273 c)327 d)373 e)377

Solução: Sabe-se que $F_8 = 13$, sendo assim utilizando-se a relação de recorrência obtemos

$$\begin{aligned}
F_9 &= 13 + 8 = 21 \\
F_{10} &= 21 + 13 = 34 \\
F_{11} &= 34 + 21 = 55 \\
F_{12} &= 55 + 34 = 89 \\
F_{13} &= 89 + 55 = 144 \\
F_{14} &= 144 + 89 = 233.
\end{aligned}$$

Portanto o 14° termo é 233.

Os problemas apresentados anteriormente, baseados na sequência de Fibonacci, podem ser facilmente adaptados para a sequência de Lucas, uma vez que ambas compartilham propriedades estruturais semelhantes.

Conclusão

A partir desta monografia, pudemos reobservar a relevância dos números de Fibonacci, e ainda adentrar e explorar propriedades e relações importantes pertinentes a sequência de Lucas. Dentre tais estudos podemos destacar a simplicidade de algumas identidades obtidas, em comparativo com as de Fibonacci, sendo este um importante aspecto a ser salientado dado a prospecção do uso de tal sequência no ensino básico. Também é válido mencionar que ao longo deste trabalho de conclusão de curso, pudemos observar alguns aspectos de correlação mais intrínsecos entre os números de Lucas e Fibonacci por intermédio do uso das fórmulas de Binet para ambas aliadas com identidades algébricas conhecidas, ainda, como pudemos interligar tais resultados novos obtidos com as somas de Fibonacci e Lucas já conhecidos anteriormente. Sendo assim, pudemos notar a importância da relação presente entre os Números de Lucas e de Fibonacci, assim como a percepção dos diversos aspectos pertencentes a ambas, tanto acadêmico quanto do nosso cotidiano, sendo estes bastante úteis durante a aplicabilidade de tais conteúdos no ensino tanto básico quanto acadêmico.

Durante o levantamento bibliográfico foram encontradas e salientadas diversas propriedades e definições pertinentes às sequências de Fibonacci e Lucas, a fim de se obter uma base sólida de conhecimento na construção de novos saberes. Além deste fato, durante tal levantamento, ocorreram a coleta de informações não somente sobre tais sequências, mas como também, sobre descobertas e fatos interessantes pertencentes ao âmbito matemático, sendo a aquisição de tais conhecimentos de extrema valia histórica.

Também é necessário salientar que, por meio deste estudo, ocorreu o aprimoramento da escrita matemática e o desenvolvimento do raciocínio diante de problemáticas e questionamentos ao longo da trajetória acadêmica. Esses fatores são de extrema importância tanto na graduação quanto na futura atuação como educadora.

Além disso, os resultados obtidos nesta última etapa da monografia são relevantes, pois evidenciam a conexão entre os números de Fibonacci e de Lucas com o conteúdo de matrizes da álgebra linear. Essa relação é fundamental, pois permite a obtenção de um grande número de equações envolvendo esses números por meio das propriedades das matrizes.

Referências

1 ABRAHAM DE MOIVRE. *Clubes de Matemática da OBMEP: Disseminando o estudo da matemática*, 2020. Disponível em: ⟨http://clubes.obmep.org.br/blog/b_abraham-de-moivre/⟩. Acesso em: 20 jan. 2023.

2 ABRANTES, P.; SERAZZI, V.; OLIVEIRA, M. C. *Educação Matemática: temas para reflexão e pesquisa*. São Paulo: Editora Papirus, 2012.

3 BRAGA, M. *Sequências Numéricas no Ensino Básico: Aplicações e Estratégias Didáticas*. Rio de Janeiro: Editora Ciência e Educação, 2018.

4 BICKNELL-JOHNSON, M. A short history of *The Fibonacci Quarterly*. The Fibonacci Quarterly, v.25, n.1, p. 2-5, 1987.

5 CARLITZ, L. A note on Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v.2, n.1, p. 15-28, 1964.

6 CERQUEIRA, A. C. S. *Um estudo sobre sequências e séries*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

7 CNN BRASIL. *Número primo de 41 milhões de dígitos é descoberto por matemático*. 2024. Disponível em: ⟨https://www.cnnbrasil.com.br/tecnologia/numero-primo-de-41-milhoes-de-digitos-e-descoberto-por-matematico/⟩. Acesso em: 19 mar. 2025.

8 COSTA, V. S. *Uma introdução aos polinômios simétricos e aplicações*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Maceió, 2013.

9 DUARTE, J. R. *Equações Diofantinas associadas a Funções Aritméticas*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2020.

10 FERRARI, L. *A Matemática das Sequências: Fibonacci, Lucas e suas Aplicações*. Porto Alegre: Editora Matemática na Escola, 2020.

11 FISHER, D. *What's the Lucas version of the Möbius test for Fibonacci numbers?*. Mathematics Stack Exchange, 2014. Disponível em: ⟨https://math.stackexchange.com/questions/823247/whats-the-lucas-version-of-the-m%C3%B6bius-test-for-fibonacci-numbers⟩. Acesso em: 10 jan. 2023.

12 GRIFFITHS, M. From golden-ratio equalities to Fibonacci and Lucas identities. *The Mathematical Gazette*, v.97, n.539, p. 234-241, 2013.

13 GOULD, H. A history of the Fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem. *The Fibonacci Quarterly*, v.19, n.3, p. 250-257, 1981.

14 HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. The series of Fibonacci and Lucas. In: *The Theory of Numbers*. 4. ed. Oxford: Oxford University Press, p. 148-150, 1960.

15 HOPE-JONES, W. The bee and the pentagon. *The Mathematical Gazette*, v.10, n.150, p. 206-206, 1921.

16 KOMATSU, T. The interval associated with a Fibonacci number. *The Fibonacci Quarterly*, v.41, n.1, p. 3-6, 2003.

17 LIVIO, M. *A Razão Áurea: A História de Phi, o Número Mais Surpreendente do Mundo*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

18 METZLER, D. Fibonacci numbers and complex trigonometry, (parts 1-9), 2015. Disponível em: ⟨http://www.youtube.com/watch?v=u_GICi_XK-0⟩. Acesso em: 07 mar. 2023.

19 NELSEN, R. B. Proof without words: Candido's identity. *Mathematics Magazine*, v.78, n.2, p. 131, 2005.

20 OLIVEIRA, F. E. R. *Sobre várias demonstrações do pequeno teorema de Fermat e as inter-relações entre as áreas da matemática*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2019.

21 PEREIRA, L.; FERREIRA, M. Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea. *Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas*, v.9, n.1, p. 67-81, 2008.

22 SANTOS, A. P. *Explorando Padrões e Sequências no Ensino Médio: Estratégias para uma Aprendizagem Significativa*. São Paulo: Blucher, 2016.

23 SELTEN, J. R. *Matemática e Natureza: Um Olhar sobre as Sequências Numéricas e suas Conexões*. Curitiba: Editora UFPR, 2019.

24 SILER, K. Fibonacci summations. *The Fibonacci Quarterly*, v.1, n.3, p. 67-69, 1963.

25 SILVA, B. A. *Números de Fibonacci e números de Lucas*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, USP, 2017.

26 ZORZATTO, M. *O Uso de Softwares na Exploração de Sequências Matemáticas*. Brasília: Editora Universidade Aberta, 2021.

Apêndices

APÊNDICE A – Sequências: Alguns Resultados Importantes

Definição A.1 (Sequência)**.** Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência.

Definição A.2 (Sequência Convergente)**.** Quando $\lim x_n = a$, diz-se que a sequência (x_n) converge para a, ou tende para a e escreve-se $x_n \to a$. Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Do contrário, ela se chama divergente. Explicitamente, uma sequência (x_n) diz-se divergente quando, para nenhum número real a, é verdade que se tenha $\lim x_n = a$.

Definição A.3 (Sequência de Cauchy)**.** Uma sequência (x_n) de números reais será dita sequência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema A.4 (Teste de Leibniz)**.** *Se (a_n) for uma sequência de termos positivos, não-crescente ($a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$), com $\lim a_n = 0$, então a série alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ será convergente.*

A demonstração do Teste de Leibniz pode ser visualizada em (6).