Universidade Federal Rural de Pernambuco
Licenciatura plena em matemática

Pedro Henrique dos Santos Silva

Um estudo sobre o Teorema de Hanh-Banach:
unicidade, versões e aplicações

Recife - PE
26 de fevereiro de 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237e dos Santos Silva, Pedro Henrique
Um estudo sobre o Teorema de Hanh-Banach: unicidade, versões e aplicações / Pedro Henrique dos Santos Silva. - 2024.
54 f.

Orientador: Eudes Mendes Barboza.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, , Recife, 2024.

1. Análise Funcional. 2. Teorema de Hahn-Banach. 3. Aplicações. I. Barboza, Eudes Mendes, orient. II. Título

CDD

Um estudo sobre o Teorema de Hanh-Banach:
unicidade, versões e aplicações

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza

Recife - PE
26 de fevereiro de 2024

Pedro Henrique dos Santos Silva

Um estudo sobre o Teorema de Hanh-Banach:
unicidade, versões e aplicações

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Profa. Dra. Yane Lísley Ramos Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Recife - PE
26 de fevereiro de 2024

Agradecimentos

Agradecer, primeiramente, a Deus por essa oportunidade em minha trajetória.

À minha família, por sempre ter me apoiado em minhas decisões, em especial a minha mãe, Adrinana e meu pai, Washington, por todo suporte, compreensão e esforço por todos esses anos. Por sempre me escutarem e me fazerem perseverar diante das dificuldades encontradas.

A todos os meus colegas de universidade, em especial, Ana Beatriz e Valdênis Martins, pela paciência, por todos os momentos de descontração, estudo e conversas, e a todos os demais que me auxiliaram e incentivaram durante todo curso.

A todos os professores do departamento de matemática, em especial, ao meu orientador, Eudes Mendes, que me acolheu durante a graduação, sempre me tranquilizando, sendo compreensivo, ensinando, expandindo minhas possibilidades e me incentivando à carreira acadêmica. E também à professora Yane Araújo, pelos ensinamentos e contribuições ao meu desenvolvimento acadêmico, ao longo de três discplinas consecutivas de análise.

Ao professor José Carlos por ter aceitado o convite de participar da banca examinadora e pelas contribuições à versão final do meu trabalho.

Resumo

A Análise Funcional desempenha um papel importante na compreensão e descrição das propriedades de espaços vetoriais topológicos, especialmente os espaços de funções. Neste contexto, uma série de resultados surge como marcos significativos na teoria e prática da Análise Funcional. No presente trabalho, nosso objetivo é estudar o Teorema de Hahn-Banach, ou seja, entender suas demonstrações tanto na sua forma analítica como na sua forma geométrica, além de buscar compreender sua versão para operadores lineares contínuos. Para isso, nos debruçamos sobre teoria e conceitos tanto da Álgebra Linear quanto da Análise, a fim de fundamentar as demonstrações e resultados presentes neste trabalho. Por fim, estabelecendo a base no Teorema de Hahn-Banach, procuramos compreender suas aplicações na Análise Funcional.
Palavras-Chave: Análise Funcional, Teorema de Hahn-Banach, Aplicações.

Abstract

Functional Analysis plays an important role in understanding and describing the properties of topological vector spaces, especially function spaces. In this context, a series of results emerges as significant milestones in the theory and practice of Functional Analysis. In the present work, our goal is to study the Hahn-Banach Theorem, that is, to understand its proofs both in its analytical and geometric forms, in addition to seeking to comprehend its version for continuous linear operators. To achieve this, we delve into the theory and concepts of both Linear Algebra and Analysis, aiming to provide the foundation for the demonstrations and results presented in this work. Finally, having established the groundwork of the Hahn-Banach Theorem, we seek to understand its applications in Functional Analysis.

Key-Words: Functional Analysis, Hahn-Banach Theorem, applications.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Análise Funcional é um ramo da matemática que lida com espaços vetoriais topológicos, mais precisamente com os espaços de funções e espaços de Banach, explorando suas características e propriedades. Dentro desse contexto, surgem resultados que buscam relacionar esses conceitos.

O Teorema de Hahn-Banach destaca-se como um dos principais resultados na Análise Funcional, estabelecendo conexões entre espaços vetoriais normados e funcionais lineares definidos nesses espaços. Especificamente, o teorema afirma que se φ é um funcional linear contínuo definido em um subespaço próprio G de um espaço vetorial normado E, então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ, e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

A partir desse resultado, torna-se possível garantir uma série de corolários e aplicações, tanto dentro do escopo da Análise Funcional quanto em outras áreas do conhecimento matemático. No presente trabalho, nosso objetivo é apresentar o Teorema de Hahn-Banach e os resultados que dele decorrem.

Apresentaremos, inicialmente, no capítulo 1, as principais definições, notações e resultados preliminares em Análise Funcional que serão necessários para o desenvolvimento desta monografia. Sugerimos a consulta a [2] e [3] para um estudo mais detalhado. Em seguida, no capítulo 2, descutiremos as extensões de Hahn-Banach, dando ênfase tanto ao seu caso real quanto complexo. Discutiremos quais condições se fazem necessárias para garantir uma única extensão e abordaremos a possibilidade de uma versão vetorial do teorema destinada a operadores lineares contínuos.

Por fim, no capítulo 3, dissertaremos sobre os principais corolários advindos do Teorema de Hahn-Banach, suas aplicações acerca da teoria de espaços separáveis e suas formas geométricas, explorando conceitos que mesclam a teoria relacionada aos espaços separáveis e sua convexidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, forneceremos uma visão abrangente das principais definições e resultados preliminares que constituem a base para o desenvolvimento do capítulo principal deste trabalho, centrado no Teorema de Hahn-Banach. Exploraremos conceitos fundamentais da Análise Funcional, e da Álgebra Linear, estabelecendo as ferramentas teóricas necessárias para compreendermos a complexidade do teorema em questão.

1.1 Espaços Vetoriais

Definição 1.1. Um conjunto não vazio V é um Espaço Vetorial, definido sobre um corpo $\mathbb{K}$ (que pode ser os reais ou os complexos), se satisfaz as condições:

$A0)$ Existe uma operação de adição, entre dois elementos $u, v \in V$, cujo resultado é um elemento $u + v \in V$. (Fechamento da Adição);

$A1)$ $u + v = v + u$;

$A2)$ $(u + v) + w = u + (v + w)$;

$A3)$ $\exists\ e \in V$; denominado elemento neutro, tal que $u + e = e + u = u$;

$A4)$ Para cada $u \in V, \exists(-u) \in V$; denominado elemento oposto de u, tal que $u + (-u) = e$.

Para todos os elementos $u, v \in V$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ a multiplicação satisfaz:

$M1)$ $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

$M2)$ $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

$M3)$ $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

$M4)$ $1u = u$.

O espaço vetorial é chamado de Espaço Vetorial Real se for definido sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, ou seja, quando os escalares são números reais, e Espaço Vetorial Complexo se for definido sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, ou seja, quando os escalares forem números complexos.

Exemplo 1.2. O conjunto $\mathbb{R}^n = \{v = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ para $n = 1, 2, ...$, com a operação de adição definida por:

$$u + v = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha u = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

é um espaço vetorial real.

Definição 1.3. Seja V um Espaço Vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um Subespaço Vetorial S de V é um subconjunto de V, que por si só também é um espaço vetorial, definido sobre o mesmo corpo que V e com as mesmas operações definidas em V.

Exemplo 1.4. $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u = \alpha(1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Ou seja, qualquer reta passando pela origem é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Espaços de Banach

Definição 1.5. Um espaço métrico é um par ordenado (M, d) formado por um conjunto M não vazio e uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, chamada métrica, que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

a) $d(x, y) \geq 0$;

b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

c) $d(x, y) = d(y, x)$;

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se E e F são subconjuntos de M, a distância entre E e F é definida por $\text{dist}(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\}$.

Definição 1.6. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço métrico (M, d).

a) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $x \in M$ se $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Neste caso, escrevemos $x_n \longrightarrow x$ e dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Caso contrário é dita divergente.

b) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy se $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

c) O espaço métrico (M, d) é um espaço métrico completo se toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento de M.

Definição 1.7. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ é uma norma se satisfaz as seguintes propriedades:

N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$, e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $x \in E$ e para todo $a \in K$;

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de espaço vetorial normado ou espaço normado. Um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$. Neste caso, dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|$. Um espaço vetorial normado E é chamado de **espaço de Banach** quando é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Proposição 1.8. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um subespaço de Banach, com a norma induzida de E, se e somente se, F é fechado em E.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [2].

Definição 1.9. Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subseteq M$, segue que:

a) Dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto $B(a, \varepsilon) = \{x \in M : d(x, a) < \varepsilon\}$ é chamado de bola aberta com centro a e raio ε;

b) Um subconjunto $A \subseteq M$ é aberto se, para cada $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$;

c) Um subconjunto $F \subseteq M$ é fechado se o seu complementar $F^c := M - F$ é aberto;

d) O interior de A é o conjunto $\operatorname{int}(A) = \{B \subseteq M : B$ é aberto e $B \subseteq A\}$;

e) O fecho de A é o conjunto $\overline{A} = \{F \subseteq M : F$ é fechado e $A \subseteq F\}$;

f) Diz-se que A é denso em M se $\overline{A} = M$;

g) Seja M um espaço vetorial real. Um conjunto não vazio $C \subseteq M$ é dito ser um conjunto convexo se, para todos $x, y \in C$ e todo $t \in [0, 1]$, valer $tx+(1-t)y \in C$, ou seja, se o segmento de reta conectando quaisquer $x, y \in C$ estiver inteiramente contido em C. O conjunto vazio de M é também, honorificamente, declarado convexo.

Dentre os espaços de Banach, existem aqueles cuja a dimensão é não finita, tais como:

Definição 1.10. O conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja fixando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, denotado por

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \longrightarrow 0\}.$$

Trata-se de um espaço de Banach de dimensão infinita. Visto que, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em c_0, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_\infty \leq \epsilon$ para todo $m, n \geq n_0$. Considere $x_n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$|a_n^j - a_m^j| \leq \sup\{|a_n^k - a_m^k| : k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty \leq \epsilon.$$

Segue que, a sequência de escalares $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo convergente. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe a_j tal que $a_n^j \longrightarrow a_j$, quando $n \to \infty$. Deste modo, suponha por absurdo que (a_j) não converge para 0, logo existe $l > 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$|a_j - 0| \geq l, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, note que

$$|a_j| \geq l \Rightarrow |a_j - a_n^j + a_n^j| \geq l \Rightarrow |a_n^j - a_j| + |a_n^j| \geq l,$$

fazendo $n \to \infty$ temos que $0 \geq l$, absurdo. Portanto, $a_j \longrightarrow 0$, então $x = (a_j) \in c_0$. Nos resta mostrar que $x_n \longrightarrow x$, assim note que

$$\lim_n \|x_n - x\|_\infty = \lim_n \sup\{|a_n^j - a_j|\} = \lim_n \sup\{|0|\} = 0,$$

logo $\lim_n \|x_n - x\|_\infty = 0$, então $x_n \longrightarrow x \in c_0$, logo c_0 é de *Banach*.

Por outro lado, podemos definir o seguinte espaço:

Definição 1.11. O subespaço de c_0 formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^\infty \in c_0 : \text{ existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Tal espaço trata-se de um espaço normado de dimensão infinita, porém sem ser de Banach, considerando os vetores de c_{00}:

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots,), \ x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right), \ldots, \ x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right), \ldots$$

Note que (x_n) é uma sequência em c_{00}. Tome $x = (\frac{1}{k})_{k=1}^\infty \in c_0$, note que

$$||x_n - x||_\infty = \left|\left|\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right) - \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)\right|\right|_\infty = \left|\left|\left(0, 0 \ldots, -\frac{1}{n+1}, \ldots\right)\right|\right|_\infty.$$

Assim, temos que

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_\infty = \lim_{n\to\infty} \left|\left|\left(0, 0 \ldots, -\frac{1}{n+1}, \ldots\right)\right|\right|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Concluímos assim, que $x_n \longrightarrow x \in c_0$. Como $x \notin c_{00}$, então resulta que c_{00} não é um subespaço fechado de c_0, então c_{00} não é de Banach.

1.3 Espaços Separáveis

Definição 1.12. Um espaço métrico (M, d) é dito separável se contém um subconjunto denso e enumerável (ou seja, se existe $X \subset M$ enumerável tal que $\overline{X} = M$).

Exemplo 1.13. Para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ é separável, pois $\mathbb{Q}^n$ é um subconjunto enumerável e denso em $\mathbb{R}^n$.

1.4 Espaços de Sequências

Aqui apresentaremos alguns espaços que serão relevantes posteriormente.

Definição 1.14. Para cada $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Neste caso, as operações usuais de funções se transformam nas operações usuais de sequências e a norma é dada por

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

que garante os espaço como sendo de Banach.

Definição 1.15. Para $p = \infty$, definimos ℓ_∞ como o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja

$$\ell_\infty = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup |a_j| < \infty \right\}.$$

O conjunto ℓ_∞ é um espaço de Banach quando munido da norma,

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup \{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

A demonstração da completude dos espaços ℓ_p e ℓ_∞ pode ser encontradas em [2]

1.5 Funcionais Lineares

Definição 1.16. Um operador linear contínuo do espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T : E \to F$ que é linear, isto é,

$$T(x+y) = T(x) + T(y),$$

para quaisquer $x, y \in E$, e

$$T(ax) = aT(x),$$

para todo $a \in \mathbb{K}$ e qualquer x em E; e é contínua, isto é, para todo $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. É possível mostrar que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções, no entanto, esses detalhes não serão abordados aqui. Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Chamamos esse espaço de dual topológico de E, ou simplesmente dual de E, e seus elementos são denominados **funcionais lineares contínuos**.

Proposição 1.17. *Sejam E e F espaços normados.*

(a) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \ e \ \|x\| \leq 1\},$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$;

(b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$;

(c) Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.

Demonstração. (a) Mostremos que a expressão $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é uma norma.

N1) Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Daí, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq 0$ e $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow \|T(x)\| = 0, \forall x \in E$ com $\|x\| \leq 1 \Leftrightarrow T(x) = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow T = 0$.

N2) Sejam $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Segue que,

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\alpha| \cdot \|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= |\alpha| \cdot \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= |\alpha| \cdot \|T\|.\end{aligned}$$

N3) Sejam $T, U \in \mathcal{L}(E,F)$. Daí,

$$\begin{aligned}\|T+U\| &= \sup\{\|T(x)+U(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| + \|U(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|U(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|T\| + \|U\|.\end{aligned}$$

Portanto $\|T\| = sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é uma norma para $\mathcal{L}(E,F)$.

(b) Para $x \in E$ e $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\}.$$

E isto implica que,

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \ \forall x \in E, \ x \neq 0.$$

A desigualdade é facilmente verificada para $x = 0$, logo é válida para todo $x \in E$.

(c) Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$, para todo $n, m \geq n_0$. Logo,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \epsilon\|x\|,$$

para todo $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$

é de Cauchy em F, logo convergente pois F é de Banach. Podemos então definir

$$T : E \to F, \ T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

A linearidade de T segue das propriedades dos limites.

De fato, veja que para $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T(x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + \alpha y) &= \lim_{n\to\infty} [T_n(x) + \alpha T_n(y)] \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= T(x) + \alpha \cdot T(y). \end{aligned}$$

Agora, fazendo $m \to \infty$, temos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|, \tag{1.1}$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|,$$

para todo $x \in E$, o que nos garante que $(T_{n_0} - T) \in L(E, F)$. Portanto, $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (1.1) segue também que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, e assim resulta que $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. Portanto, $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach. □

No caso de funcionais lineares, a norma dos operadores se transforma em

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\},$$

para todo espaço normado E e todo funcional $\varphi \in E'$.

No contexto de operadores lineares entre espaços normados a estrutura algébrica simplifica o comportamento topológico, garantindo uma série de equivalências que mostraremos a seguir:

Teorema 1.18. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \longrightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T *é lipschitziano;*

(b) T *é uniformemente contínuo;*

(c) T *é contínuo;*

(d) T *é contínuo em algum ponto de* E*;*

(e) T *é contínuo na origem;*

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$*;*

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *para todo* $x \in E$*.*

Sugerimos a consulta às referências [2] e [3] para uma análise detalhada da demonstração desse resultado.

Definição 1.19. Sejam E e F conjuntos e $T : E \to F$ uma função. O gráfico de T é o conjunto

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Teorema 1.20. *(Teorema do Gráfico fechado) Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $T : E \to F$ *um operador linear. Então* T *é contínuo se, e somente se,* $G(T)$ *é fechado em* $E \times F$*.*

Exemplo 1.21. Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to E'$ um operador linear simétrico, isto é, T é linear e

$$T(x)(y) = T(y)(x),$$

para todos $x, y \in E$. Mostremos que T é contínuo. Pelo Teorema 1.20, basta verificar que $G(T)$ é fechado. Para isto, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma convergindo para $x \in E$ e suponha que $T(x_n) \to \phi$ em E'. Fixado $y \in E$, tomando $n \to \infty$,

$$\phi(y) \leftarrow T(x_n)(y) = T(y)(x_n) \to T(y)(x) = T(x)(y),$$

o que nos permite concluir que $T(x)(y) = \phi(y)$. Como $y \in E$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\phi = T(x)$, e portanto $G(T)$ é fechado.

Definição 1.22. Dizemos que dois espaços normados E e F são topologicamente isomorfos, ou simplesmente isomorfos, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \to F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \to E$ (que é sempre linear) é também contínuo. Tal operador é chamado de isomorfismo topológico ou simplesmente isomorfismo.

Exemplo 1.23. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - 2y, y)$ é um isomorfismo (automorfismo de $\mathbb{R}^2$). Visto que, T é contínuo e bijetor. Para garantir T injetor basta determinar o núcleo de T, note que um elemento de $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo se:

$$T(x,y) = (x - 2y, y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Assim, $N(T) = \{(0,0)\}$ e, portanto, T é injetor. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos:

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(N(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Logo, como a dimensão da imagem de T é igual à dimensão do espaço do domínio, então T é sobrejetor. Então T é bijetor, e portanto admite inversa restando mostrarmos que o operador inverso é contínuo. Note que, queremos verificar se existe uma constante $M > 0$ tal que, para todo vetor (x, y) em $\mathbb{R}^2$, a desigualdade $\|T^{-1}(x, y)\| \leq M\|(x, y)\|$ seja satisfeita.

Calculando a norma do operador inverso:

$$\|T^{-1}(x,y)\| = \sqrt{x^2 + 4xy + 5y^2}.$$

Queremos encontrar uma constante $M > 0$ tal que:

$$\sqrt{x^2 + 4xy + 5y^2} \leq M\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado para simplificar:

$$x^2 + 4xy + 5y^2 \leq M^2(x^2 + y^2).$$

Para que isso seja verdade para todo $x, y \in \mathbb{R}$, podemos escolher M de forma que $M^2 \geq 5$. Portanto, M pode ser escolhido como $M \geq \sqrt{5}$.

Assim, o operador inverso $T^{-1}(x,y) = (x+2y, y)$ é contínuo, pois existe uma constante $M \geq \sqrt{5}$ que satisfaz a desigualdade. Concluindo que T é um isomorfismo.

Definição 1.24. Uma função $f : E \to F$ — não necessariamente linear — tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamada de isometria. Um operador linear $T : E \to F$ que é uma isometria é chamado de isometria linear. É fácil ver que toda isometria linear é injetora e contínua. Um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de isomorfismo isométrico, e nesse caso dizemos que os espaços são isomorfos isometricamente e equivale dizer que $T : E \longrightarrow F$ preserva as normas:

$$\|T(x)\|_F = \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Exemplo 1.25. Os espaços ℓ_1 e $(c_0)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \to \varphi_b \in (c_0)' \text{ logo } \ \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [2].

Definição 1.26. Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : E \longrightarrow E$ é uma projeção se $P^2 := P \circ P = P$. É claro que se $P \neq 0$ é uma projeção, então $\|P\| \geq 1$.

Exemplo 1.27. O operador identidade $Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $Id(x) = x$ é uma projeção visto que, $Id^2(x) = (Id \circ Id)(x) = Id(Id(x)) = Id(x) = x$.

1.6 Espaços de Hilbert

Definição 1.28. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em X é uma função $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que satisfaz, para todos $x, y, z \in X$ e α escalar:

PI1: $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

PI2: $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

PI3: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

PI4: $\langle x, x\rangle \geq 0$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

Ao par $(X, \langle , \rangle)$ damos o nome de espaço com produto interno.

Exemplo 1.29. $\mathbb{R}^n$ é um espaço com produto interno (chamado de produto interno usual) dado por $\langle x, y\rangle = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, onde $x = (a_1, \ldots, a_n)$ e $y = (b_1, \ldots, b_n)$.

Definição 1.30. Dois vetores, v e u em V, são ortogonais se o seu produto interno $\langle v, u\rangle = 0$. Denotamos por $v \perp u$.

Definição 1.31 (Espaço de Hilbert)**.** Seja X um espaço vetorial com um produto interno. Se X é completo com relação à métrica induzida pelo produto interno, X é dito um espaço de Hilbert.

Observação 1.32. Um produto interno, em um espaço vetorial, gera uma norma por meio da seguinte relação:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Exemplo 1.33. O espaço ℓ_2 das sequências de quadrado somável é um espaço de Hilbert.

De fato, ℓ_2 é constituído por todas as sequências $x = (x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots)$ de números reais tais que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$. Para concluirmos que ℓ_2 é de Hilbert, é necessário mostrar que o espaço é completo em relação a métrica dada pela norma induzida pelo produto interno, $d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$. Seja então (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$. Fixado qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos $|x_{mi} - x_{ni}| \leq |x_m - x_n|$, logo $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Segue-se que, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe o número real $a_i = \lim_{n\to} x_{ni}$. Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n > n_0$ temos $\sum\limits_{i=1}^{k} (x_{mi} - x_{ni})^2 < \epsilon^2$. Mantendo fixos k e n e fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima, concluimos que, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - x_{mi})^2 \leq \epsilon^2, \ \forall \ n > n_0.$$

Fazendo agora, $k \to \infty$, resulta $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{ni})^2 \leq \epsilon^2$ para todo $n > n_0$. Em particular, $n > n_0 \Rightarrow (a - x_n) \in \ell_2$. Segue que $a = (a - x_n) + x_n$ pertence a ℓ_2, pois x_n pertence ao espaço vetorial ℓ_2. Logo temos que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$, ou seja $a = \lim x_n$ em ℓ_2. Portanto ℓ_2 é um espaço de Hilbert.

Observação 1.34. Para $p \neq 2$ segue que ℓ_p não é um espaço de Hilbert. para garantir isso, basta supor que ℓ_p seja um espaço de Hilbert. Então, deve satisfazer para todos os u, v:

$$2\|u\|_{2p}^2 + 2\|v\|_{2p}^2 = \|u+v\|_{2p}^2 + \|u-v\|_{2p}^2.$$

Tome $u = e_1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ e $v = e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Portanto, pela última igualdade, temos:

$$4 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}.$$

Agora, resolvendo a última igualdade segue que $p = 2$.

Definição 1.35 (Soma direta)**.** Um espaço vetorial X é a soma direta de dois subsespaços Y, Z de X, escrevemos

$$X = Y \oplus Z,$$

se cada $x \in X$ possui uma única representação $x = y + z$ tal que $y \in Y, \ z \in Z$.

Teorema 1.36. *Seja Y qualquer subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Então*

$$H = Y \oplus \tilde{Y},$$

sendo $\tilde{Y} = \{x \in H : \langle x, u \rangle = 0, \, \forall u \in Y\}$.

A demonstração desse resultado pode ser consultada em [5].

Teorema 1.37 (Teorema de Riesz-Fréchet)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \text{ para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|y_0\|$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [2].

1.7 Lema de Zorn

O Lema de Zorn é um resultado fundamental na teoria dos conjuntos e na teoria dos conjuntos ordenados. Ele foi formulado pelo matemático polonês Max Zorn em 1935 e desempenha um papel crucial em muitas áreas da matemática, como a teoria dos grupos, álgebra linear, topologia, análise funcional e teoria dos conjuntos. O Lema de Zorn é particularmente útil para provar a existência de objetos matemáticos que podem ser difíceis de construir diretamente. Nesse caso, utilizaremos o lema como um instrumento de indução para auxiliar na garantia do Teorema de Hahn-Banach posteriormente.

a) Uma **ordem parcial** no conjunto P é uma relação $\leq$ em P que satisfaz as seguintes propriedades:

I) $x \leq x$ para todo $x \in P$ (reflexiva);

II) Se $x, y \in P$, $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (antissimétrica);

III) Se $x, y, z \in P$, $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (transitiva).

Neste caso, diz-se que $(P, \leq)$ é um **conjunto parcialmente ordenado**.
No que segue, $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado fixado.

b) Uma **cota superior** de um subconjunto Q de P, se existir, é um elemento $q \in P$ tal que $p \leq q$ para todo $p \in Q$.

c) Uma **cota inferior** de um subconjunto Q de P, se existir, é um elemento $q \in P$ tal que $p \geq q$ para todo $p \in Q$.

d) Um **elemento maximal** de P, se existir, é um elemento $m \in P$ tal que se $p \in P$ e $q \leq p$ para todo $q \in P$, então $m = p$.

e) Um subconjunto Q de P é dito **totalmente ordenado** se, para todos $p, q \in Q$, é verdade que $p \leq q$ ou $q \leq p$.

Exemplo 1.38. Seja uma relação D sobre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais tal que $(a, b) \in D$ se, e somente se, $a|b$ (a divide b), isto é, se existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$.

Exemplo 1.39. A relação "maior ou igual" $(\geq)$ no conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem tanto parcial quanto total no conjunto dos reais.

Lema 1.40 (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado, não vazio, no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, possui um elemento maximal.*

Não demonstraremos o Lema de Zorn, pois essa demonstração é de caráter muito técnico. Pode encontrá-la na referência [4].

Capítulo 2

Versões do Teorema de Hahn-Banach

Neste capítulo, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Hahn-Banach. Inicialmente, exploraremos o caso real, seguido pelo caso complexo. Posteriormente, analisaremos, as condições sob as quais o teorema assegura a unicidade das extensões dos funcionais lineares em espaços de Hilbert e examinaremos suas versões vetoriais. Utilizaremos como base a referência [2].

2.1 Caso real do Teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.1. *(Teorema de Hahn-Banach forma analítica - caso real) Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ, isto é $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $\widetilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Considere a seguinte família $\mathcal{P}$ de funcionais lineares definidos em subespaços de E que contém G:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} \phi : D(\phi) \subseteq E \longrightarrow \mathbb{R} : D(\phi) \text{ é subespaço vetorial de } E, \\ \phi \text{ é linear, } G \subseteq D(\phi), \phi(x) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in G \\ \text{e } \phi(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \text{ em } D(\phi) \end{array} \right\}.$$

Em $\mathcal{P}$, definimos a relação de ordem parcial

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Longleftrightarrow D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1,$$
$$\text{isto é } \phi_2(x) = \phi_1(x) \text{ para todo } x \in D(\phi_1).$$

Note que $\mathcal{P}$ é não-vazio pois $\varphi \in \mathcal{P}$. Vejamos que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ admite uma cota superior. Com efeito, dado $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ totalmente ordenado, defina $\phi : D(\phi) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\phi) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta) \quad \text{e} \quad \phi(x) = \theta(x), \text{ se } x \in D(\theta).$$

Note que a boa definição de ϕ decorre da ordenação total de $\mathcal{Q}$. É imediato que $\phi \in \mathcal{P}$ e que ϕ é cota superior para $\mathcal{Q}$. Então pelo Lema 1.40 podemos concluir que $\mathcal{P}$ admite um elemento maximal, que será denotado por $\widetilde{\varphi}$.

Observe que para obter o resultado basta mostrar que $D(\widetilde{\varphi}) = E$. Para isso suponha que $D(\widetilde{\varphi}) \neq E$. Nesse caso podemos escolher $x_0 \in E - D(\widetilde{\varphi})$ e definir $\widetilde{\phi} : D(\widetilde{\phi}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\widetilde{\phi}) = D(\widetilde{\varphi}) + [x_0] \text{ e } \widetilde{\phi}(x + tx_0) = \widetilde{\varphi}(x) + t\alpha,$$

onde queremos, por enquanto que, α satisfaça as seguintes desigualdades:

$$\widetilde{\varphi}(x) + \alpha = \widetilde{\phi}(x + x_0) \leq p(x + x_0) \text{ para todo } x \in D(\widetilde{\varphi}) \text{ e}$$
$$\widetilde{\varphi}(x) - \alpha = \widetilde{\phi}(x - x_0) \leq p(x - x_0) \text{ para todo } x \in D(\widetilde{\varphi}).$$

Para tanto, basta escolher α de modo que

$$\sup_{x \in D(\widetilde{\varphi})} \{\widetilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(\widetilde{\varphi})} \{p(x + x_0) - \widetilde{\varphi}(x)\}.$$

Tal escolha é possível pois para $x, y \in D(\widetilde{\varphi})$ temos

$$\widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(y) = \widetilde{\varphi}(x + y) = p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

e consequentemente

$$\widetilde{\varphi}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \widetilde{\varphi}(x),$$

para quaisquer $x, y \in D(\widetilde{\varphi})$. Está estabelecido então que é possível escolher α atendendo àquelas duas exigências iniciais. Feito isso, podemos concluir que:

- Para $t > 0$,

$$\widetilde{\phi}(x + tx_0) = \widetilde{\phi}\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = t\widetilde{\phi}\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).$$

- Para $t < 0$,

$$\widetilde{\phi}(x+tx_0) = \widetilde{\phi}\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -t\widetilde{\phi}\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \leq -tp\left(\frac{-x}{t} - x_0\right) = p(x+tx_0).$$

- Para $t = 0$,

$$\widetilde{\phi}(x + tx_0) = \widetilde{\phi}(x) = \widetilde{\varphi}(x) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Segue então que $\widetilde{\phi} \in \mathcal{P}$, $\widetilde{\varphi} \leq \widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\varphi} \neq \widetilde{\phi}$. Como isso vai de encontro a maximidade de $\widetilde{\varphi}$, temos $D(\widetilde{\varphi}) = E$ e assim conclui a demonstração. $\square$

2.2 Caso complexo do Teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.2. *(Teorema de Hahn-Banach) Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a| \cdot p(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e} \tag{2.1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E. \tag{2.2}$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Primeiramente, perceba que de (2.1) e (2.2) segue que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Com efeito, de (2.2) temos que $p(0) = p(0 + 0) \leq 2p(0)$, logo $p(0) \geq 0$. De (2.1), temos que $p(x) = p(-x)$, visto que $p(-x) = |-1|p(x) = 1 \cdot p(x) = p(x)$. Desse modo, para todo $x \in E$,

$$2p(x) = p(x) + p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(0) \geq 0.$$

Considerando, primeiramente o caso onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, temos partindo da hipótese que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Pelo Teorema 2.1 garantimos a existência de um funcional linear $\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ a E e que $\widetilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Desta desigualdade e de (2.1) temos que

$$-\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(-x) \leq p(-x) = p(x),$$

para todo $x \in E$. Logo, por ambas desigualdades, segue que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Agora, façamos para o caso complexos, ou seja, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definamos $\varphi_1, \varphi_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_1(x) = Re(\varphi(x))$ e $\varphi_2(x) = Im(\varphi(x))$, é claro que φ_1 e φ_2 são lineares, tomam valores reais e $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Consideremos de $E_{\mathbb{R}}$ e $G_{\mathbb{R}}$ os espaços vetoriais reais subjacentes a E e G. Então φ_1 e φ_2 são funcionais lineares sobre $G_{\mathbb{R}}$. Para $x \in G_{\mathbb{R}}$, obtemos

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema 2.1 existe então um funcional linear $\widetilde{\varphi_1} : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_1 a $E_{\mathbb{R}}$ e que satisfaz $\widetilde{\varphi_1}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$. Para o caso de φ_2, temos que para $x \in G$,

$$i(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) = i\varphi(x) = \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix).$$

Portanto, $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$ para todo $x \in G$. Definindo então

$$\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\ \widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi_1}(x) - i\widetilde{\varphi_1}(ix),$$

segue que $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$. Verifiquemos que $\widetilde{\varphi}$ definido anteriormente é um funcional linear. Note que $\widetilde{\varphi}(x + y) = \widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(y)$ para todos $x, y \in E$, pois

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(x + y) &= \widetilde{\varphi_1}(x + y) - i\widetilde{\varphi_1}(i(x + y)) \\
&= \widetilde{\varphi_1}(x) + \widetilde{\varphi_1}(y) - i\widetilde{\varphi_1}(ix) - i\widetilde{\varphi_1}(iy) \\
&= \widetilde{\varphi_1}(x) - i\widetilde{\varphi_1}(ix) + \widetilde{\varphi_1}(y) - i\widetilde{\varphi_1}(iy) \\
&= \widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(y).
\end{aligned}$$

Agora, vejamos que, dados $(a+ib) \in \mathbb{C}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}((a+bi)x) &= \widetilde{\varphi_1}(ax+ibx) - i\widetilde{\varphi_1}((i(a+bi)x)) \\
&= a\widetilde{\varphi_1}(x) + b\widetilde{\varphi_1}(ix) - i(a\widetilde{\varphi_1}(ix) - b\widetilde{\varphi_1}(x)) \\
&= (a+bi)(\widetilde{\varphi_1}(x) - i\widetilde{\varphi_1}(ix)) = (a+bi)\widetilde{\varphi}(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{\varphi}$ é linear. Resta mostrarmos que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Se $\widetilde{\varphi}(x) = 0$, como $p(x) \geq 0$ a desigualdade é óbvia. Agora, tomando $x \in E$ tal que $\widetilde{\varphi}(x) \neq 0$. Então existe θ tal que $\widetilde{\varphi}(x) = |\widetilde{\varphi}(x)|e^{i\theta}$. Segue que $|\widetilde{\varphi}(x)| = e^{-i\theta}\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(e^{-i\theta}x)$. Como $|\widetilde{\varphi}(x)|$ é real, temos

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = \widetilde{\varphi}(e^{-i\theta}x) = \widetilde{\varphi_1}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

$\square$

Exemplo 2.3. Seja $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$. Consideremos $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

temos que p é sublinear. Seja $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,x) = x$ tem-se que f é linear, e $f(x,x) \leq p(x,x)$ para todo $x \in G$, pois

$$f(x,x) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+x^2} = p(x,x).$$

Tomemos os funcionais lineares

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ F_1(x,y) = x;$$

$$F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ F_2(x,y) = y.$$

Note que, $F_1|_G = f$ e $F_2|_G = f$. Além disso, temos

$$F_1(x,y) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = p(x,y)$$

$$F_2(x,y) = y \leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = p(x,y)$$

o que mostra que o funcional que estende f não é necessáriamente único.

2.3 Extensão única de Hahn-Banach em Espaços de Hilbert

O Teorema de Hahn-Banach, conforme apresentado até o momento, assegura extensões de funcionais lineares. No entanto, diante dos resultados apresentados, não há garantia da unicidade dessas extensões. Porém, ao considerarmos funcionais lineares definidos sobre certos tipos de subespaços de Banach, como espaços de Hilbert, a extensão de Hahn-Banach de um funcional linear contínuo é única.

Apresentaremos um resultado que trata da unicidade da extensão de Hahn-Banach de um funcional linear contínuo definido em um subespaço fechado de um espaço de Hilbert:

Teorema 2.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e S um subespaço fechado de H. Então qualquer funcional linear contínuo em S tem uma única extensão de Hahn-Banach para H.*

Demonstração. Seja $f : S \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Por hipótese, H é um espaço de Hilbert e S um subespaço fechado de H, logo pelo Teorema 1.36

$$H = S \oplus \tilde{S},$$

em que $\tilde{S} = \{x \in H : \langle x, u \rangle = 0, \forall u \in S\}$. Defina $F : H \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$F(x) = f(p_S(x)), \ \forall x \in H,$$

sendo $p_S(x) = x$ a projeção ortogonal de x em S. Vamos mostrar que F é uma extensão de Hahn-Banach de f. Note que F é linear contínuo. Temos que para cada $x \in S$, $p_S(x) = x$, o que implica em $F(x) = f(p_S(x)) = f(x)$, ou seja, F é uma extensão de f. Resta mostrar que $\|F\| = \|f\|$. Sendo F uma extensão de f segue que $\|F\| \geq \|f\|$. Por outro lado, para cada $x \in H$ podemos escrever

$$x = x - p_S(x) + p_S(x) \text{ com } x - p_S(x) \in \tilde{S} \text{ e } p_S(x) \in S. \tag{2.3}$$

Daí, pelo Teorema de Pitágoras obtemos,

$$\|x\|^2 = \|x - p_S(x)\|^2 + \|p_S(x)\|^2 \geq \|p_S(x)\|^2, \ \forall x \in H.$$

Logo, $\|p_S(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in H$. Então,

$$|F(x)| = |f(p_S(x))| \leq \|f\|\|p_S(x)\| \leq \|f\|\|x\|, \ \forall x \in H,$$

segue que $\|F\| \leq \|f\|$. Portanto, F é uma extensão de Hahn-Banach de f. Agora mostraremos que dada qualquer G extensão de Hahn-Banach de f pelo Teorema 1.37 existe um único $b \in H$ tal que

$$G(x) = \langle x, b\rangle, \ \forall x \in H \text{ e } \|G\| = \|b\|.$$

Então, para cada $x \in S$ temos

$$\begin{aligned} f(x) = G(x) = \langle x, b\rangle &= \langle x, b - p_S(b) + p_S(b)\rangle \\ &= \langle x, b - p_S(b)\rangle + \langle x, p_S(b)\rangle = \langle x, p_S(b)\rangle, \end{aligned}$$

o que por sua vez implica em $\|f\| = \|p_S(b)\|$. Logo, $\|b\| = \|G\| = \|f\| = \|p_S(b)\|$ e sendo $\|b\|^2 = \|b - p_S(b)\|^2 + \|p_S(b)\|^2$ segue que $b - p_S(b) = 0$, ou seja, $b = p_S(b)$. Daí, para cada $x \in H$ temos

$$\begin{aligned} G(x) &= \langle x, b\rangle = \langle x, p_S(b)\rangle \\ &= \langle (x - p_S(x)) + p_S(x), p_S(b)\rangle = \langle x - p_S(x), p_S(b)\rangle + \langle p_S(x), p_S(b)\rangle \\ &= 0 + \langle p_S(x), p_S(b)\rangle = f(p_S(x)) = F(x). \end{aligned}$$

Portanto, a extensão de Hahn-Banach de f é única. □

Observação 2.5. Além disso, é possível observar a unicidade da extensão de c_0 para ℓ_∞. De modo análogo, esse resultado também se aplica aos espaços $c_0(X_n)$, onde $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de espaços normados. Para um estudo mais detalhado, recomenda-se consultar a referência [2].

2.4 Versão Vetorial do Teorema de Hahn-Banach

Visto que o Teorema de Hahn-Banach garante a extensão de funcionais lineares, dedicaremos nossa atenção agora à possibilidade de estender operadores lineares contínuos. Em outras palavras, se G é um subespaço de um espaço normado E e $T \in \mathcal{L}(G, F)$, então sempre existirá um operador $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ que coincide com T em G, desde que certas condições sejam satisfeitas.

Proposição 2.6. *Seja F um subespaço do espaço de Banach E. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Existe uma projeção $P : E \longrightarrow E$ cuja imagem coincide com F. Neste caso dizemos que P é uma projeção de E sobre F;

(b) F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$.

Neste caso $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ e $G = \ker(P)$.

Demonstração. $(a) \Longrightarrow (b)$ Provemos primeiramente a igualdade $F = \{x \in E : P(x) = x\}$. Se $x \in F$, tomando $y \in E$ tal que $P(y) = x$ resulta que $x = P(y) = P(P(y)) = P(x)$. Se $x = P(x)$, então segue que $x \in Im(P) = F$. Consequentemente, considerando Id_E o operador identidade em E, é verdade que

$$F = \{x \in E : P(x) = x\} = \{x \in E : (P - Id_E)(x) = 0\} = (P - Id_E)^{-1}(\{0\}),$$

é fechado, visto que imagem inversa do $\{0\}$ é fechado pela função $P - Id_E$. Tome agora $G = \ker(P)$. É claro que G é subespaço fechado de E. Para todo $x \in E$ vale que $(x - P(x)) \in G$, $P(x) \in F$ e $x = ((x - P(x)) + P(x))$. Se $x \in G \cap F$, temos $x = P(x)$ pois $x \in F$ e $P(x) = 0$ pois $x \in G$. Segue que $x = 0$.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Para cada $x \in E$, existem únicos $x_1 \in F$ e $x_2 \in G$ tais que $x = x_1 + x_2$. É imediato que o operador $P : E \longrightarrow E$ dado por $P(x) = x_1$ está bem definido, é linear, $P^2 = P$, $Im(P) = F$, $\ker(P) = G$ e $F = \{x \in E : P(x) = x\}$. Resta prova que P é contínuo. Para isso seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $x_n \longrightarrow x$ e $P(x_n) \longrightarrow y$.

Para cada n, escreva $x_n = y_n + z_n$ com $y_n \in F$ e $z_n \in G$. Então

$$z_n = x_n - y_n = x_n - P(x_n) \longrightarrow x - y.$$

Como G é fechado, $x - y \in G$, e portanto $P(x) = P(y)$. Por outro lado, $y_n = P(x_n) \longrightarrow y$. Como F é fechado, $y \in F$. Assim, $y = P(y) = P(x)$. Ou seja, pelo Teorema 1.20 resulta que o operador linear P é contínuo. $\square$

Definição 2.7. Um subespaço F do espaço de Banach E é complementado se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 2.6. Dizemos que F é λ - complementado, $\lambda \geq 1$, se F é complementado por uma projeção de norma igual a λ.

Observação 2.8. Segue assim da Proposição 2.6 que todo subespaço complementado de um espaço de Banach é fechado.

Exemplo 2.9. Todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado. Com efeito, seja F um subespaço de dimensão n do espaço de Banach E e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base para F. Para cada $j = 1, \ldots, n$, considere o funcional linear contínuo $\varphi_j \in F'$ dado por $\varphi_j\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = a_j$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\widetilde{\varphi}_j \in E'$ extensão de φ_j a E, $j = 1, \ldots, n$. Resta assim, mostrarmos que o operador $P := \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \otimes e_j$ é uma projeção de E sobre F. Para isso, se faz necessário garantirmos que $P^2 = P$, sendo assim, suponha $x \in E$ aplicado em P, logo temos que $P^2(x) = P(P(x))$, daí, segue que:

$$\begin{aligned}
P^2(x) = P(P(x)) &= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \otimes e_j \left(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\varphi}_k \otimes e_k(x)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \otimes e_j \left(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\varphi}_k(x) e_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \left(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\varphi}_k(x) e_k\right) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j(x) e_j \\
&= P(x),
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $Im(P) = F$. Dado $y \in F$, sabemos que y pode ser escrito como $y = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$, para algum conjunto de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nesse caso, podemos escolher $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ e temos:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j(x) e_j = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) e_j = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j = y.$$

Portanto, y pertence à imagem de P. Isso mostra que $Im(P) = F$. Assim, como $P^2 = P$ e $Im(P) = F$, concluímos que o operador P é uma projeção de E em F, logo, F é complementado.

Exemplo 2.10. Sejam E e F espaços de Banach. Por meio da projeção $(x, y) \in E \times F \longrightarrow (x, 0) \in E \times F$, vemos que $E = E \times \{0\}$ é 1- complementado em $E \times F$.

De fato, para mostrar que $E = E \times \{0\}$ é 1-complementado em $E \times F$, precisamos encontrar um subespaço G fechado de $E \times F$ tal que $E \times \{0\} \oplus G = E \times F$ e $\|P\| \leq 1$, onde P é a projeção de $E \times F$ em $E \times \{0\}$. Considere $G = \{0\} \times F$, ou seja, G consiste de todos os elementos de $E \times F$ cuja primeira componente é zero. Primeiro, vamos verificar que $E \times \{0\} \cap G = \{(0, 0)\}$. Se $(x, 0) \in E \times \{0\}$ e $(0, y) \in G$, note que $(x, 0) \in G$ quando $x = 0$, de modo análogo, $(0, y) \in E \times \{0\}$ quando $y = 0$, ou seja o único elemento que está em ambos os conjuntos é $(0, 0)$, o que implica que a única interseção entre $E \times \{0\}$ e G é o ponto $(0, 0)$. Agora, mostraremos que $E \times \{0\} + G = E \times F$. Dado um elemento $(x, y) \in E \times F$, podemos escrevê-lo como $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$. O primeiro termo $(x, 0)$ está em $E \times \{0\}$ e o segundo termo $(0, y)$ está em G. Portanto, $E \times \{0\} + G = E \times F$. Resta verificar que $\|P\| = 1$, suponha $(x, y) \in E \times F$, tal que $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\|(x, y)\| \leq 1$, note que

$$\|P(x, y)\| = \|(x, 0)\| = \|x\| \leq 1,$$

tomando o supremo em ambos lados obtemos que

$$\|P\| \leq 1,$$

assim, como P é uma projeção sabemos que $\|P\| \geq 1$, logo resulta que $\|P\| = 1$. Portanto, segue que $E = E \times \{0\}$ é 1-complementado em $E \times F$ com $G = \{0\} \times F$.

Exemplo 2.11. Sabemos que um subespaço não-fechado de um espaço de Banach não é complementado. Por exemplo c_{00} não é complementado em c_0, visto que c_{00} não é fechado.

Uma vez definidos os conceitos de projeção e subespaços complementados, podemos garantir que os operadores definidos em subespaços complementados podem ser estendidos, mantendo sua continuidade a todo o espaço.

Proposição 2.12. *Sejam G um espaço vetorial normado, F um subespaço complementado do espaço de Banach E e $T \in \mathcal{L}(F, G)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, G)$ extensão de T a E.*

Demonstração. Como por hipótese F é um subespaço complementado do espaço de Banach E, então, existe uma projeção P de E sobre F. Assim, dado $T \in \mathcal{L}(F, G)$, defina $\widetilde{T} = T \circ P : E \longrightarrow G$ que por sua vez estende T. Assim, resta mostrarmos que $\widetilde{T}$ é linear e contínuo. Referente a linearidade, sejam $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(x + \alpha y) &= T(P(x + \alpha y)) \\ &= T(P(x) + \alpha P(y)) \quad \text{(projeção é linear)} \\ &= T(P(x)) + \alpha T(P(y)) \quad (T \text{ é linear em } F) \\ &= \widetilde{T}(x) + \alpha \widetilde{T}(y). \end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{T}$ é um operador linear de E em G. Resta assim, mostrarmos que $\widetilde{T}$ é contínuo:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}(x)\| &= \|T(P(x))\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|P(x)\| \quad (T \text{ é contínuo e } P \text{ é uma projeção}) \\ &\leq \|T\| \cdot \|P\| \cdot \|x\| \quad (P \text{ é contínuo}) \\ &\leq \|T\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

assim, $\widetilde{T}$ é contínuo e portanto $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, G)$. □

Entretanto, quando o subespaço não é complementado, ao contrário dos funcionais lineares contínuos, os operadores lineares contínuos nem sempre podem ser estendidos de forma contínua. Em outras palavras, não existe uma versão vetorial do Teorema de Hahn-Banach.

Exemplo 2.13. O subespaço c_0 das sequências convergentes a 0 não é complementado no espaço ℓ_∞ das sequências reais limitadas.

Proposição 2.14. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço não-complementado de E. Então não existe operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(x) = x$ para todo $x \in F$, ou seja, o operador identidade em F não pode ser estendido continuamente a E.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(x) = x$ para todo $x \in F$. O operador inclusão dado por $i_F : F \longrightarrow E$ tal que $i_F(x) = x$, é linear e contínuo, logo $i_F \circ T$ é um operador linear contínuo de E em E. Como $T(x) \in F$ para todo $x \in E$, segue que $T^2(x) = T(T(x)) = T(x)$ para todo $x \in E$. Assim, temos que $i_F \circ T$ é uma projeção de E em F, garantindo F ser complementado, o que contradiz a hipótese de F não ser complementado em E. □

Mesmo não havendo uma versão vetorial do Teorema de Hahn-Banach, está aberta a possibilidade de que operadores lineares contínuos em determinados espaços possam ser estendidos de forma contínua. Por exemplo, operadores lineares contínuos que mapeiam para o espaço ℓ_∞ podem sempre ser estendidos preservando a norma.

Teorema 2.15. *(Teorema de Phillips) Sejam F um subespaço do espaço normado E e $T \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty)$ extensão de T a E. Mais ainda, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o funcional linear contínuo de norma 1 dado por

$$\varphi_n : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K},\ \varphi_n\left((a_j)_{j=1}^\infty\right) = a_n.$$

Então $\varphi_n \circ T \in F'$ para todo n e $T(x) = ((\varphi_n \circ T)(x))_{n=1}^\infty$ para todo $x \in F$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada n existe $\widetilde{\varphi}_n$ extensão de $\varphi_n \circ T$ a E com $\|\varphi_n \circ T\| = \|\widetilde{\varphi}_n\|$. Assim, defina

$$\widetilde{T} : E \longrightarrow \ell_\infty,\ \widetilde{T}(x) = (\widetilde{\varphi}_n(x))_{n=1}^\infty.$$

Note que, $\widetilde{T}$ estende T e é linear, visto que dados $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(x + \alpha y) &= (\widetilde{\varphi}_n(x + \alpha y))_{n=1}^\infty \\
&= (\widetilde{\varphi}_n(x) + \alpha\widetilde{\varphi}_n(y))_{n=1}^\infty \\
&= (\widetilde{\varphi}_n(x))_{n=1}^\infty + \alpha(\widetilde{\varphi}_n(y))_{n=1}^\infty \\
&= \widetilde{T}(x) + \alpha\widetilde{T}(y).
\end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}(x)\| = \sup |\widetilde{\varphi}_n(x)| \leq \sup_n \|\widetilde{\varphi}_n\| \cdot \|x\| = \sup \|\varphi_n \circ T\| \cdot \|x\| \\ \leq \sup_n \|\varphi_n\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| = \|T\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

E portanto $\widetilde{T}$ é contínuo e $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Resta mostrarmos que $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$, note que como $F \subset E$, $\|\widetilde{T}\|$ e $\|T\|$ são dadas, respectivamente, por:

$$\|\widetilde{T}\| = \sup\{\|\widetilde{T}(x)\| : \|x\| \leq 1,\ x \in E\},$$

e

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1,\ x \in F\}.$$

Ou seja, $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$, que por sua vez implica que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Concluindo assim a demonstração. $\square$

Corolário 2.16. *Se ℓ_∞ é subespaço fechado de um espaço de Banach E, então é 1-complementado em E.*

Demonstração. Considere o operador identidade dado por $id : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$, $id(x) = x$. Como por hipótese ℓ_∞ é subespaço fechado de um espaço de Banach E, então pelo Teorema 2.15 existe $T : E \longrightarrow \ell_\infty$ extensão de id a E tal que $\|T\| = \|id\| = 1$. Agora, considerando i a inclusão de ℓ_∞ em E, podemos definir $i \circ T : E \longrightarrow E$ uma projeção de E em ℓ_∞ tal que $\|(i \circ T)\| = 1$. De fato, note que, dado $x \in E$, $i(T(x)) = x$, pois $T(x) \in \ell_\infty$ e i mapeia uma sequência em ℓ_∞ para um valor correspondente em E, segue assim que

$$\begin{aligned}(i \circ T)^2(x) = i(T(x))^2 = i\left(T(i(T(x)))\right) \\ = i(T(x)) = (i \circ T)(x).\end{aligned}$$

Ou seja, $(i \circ T)$ é de fato uma projeção de E em ℓ_∞. Resta mostrarmos que $\|i \circ T\| = 1$. Com efeito, note que dado $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$, segue que

$$\|(i \circ T)(x)\|_{\ell_\infty} = \|i(T(x))\|_{\ell_\infty} = \|x\| \leq 1,$$

Tomando o supremo em ambos os lados, implica que $\|(i \circ T)\| \leq 1$. Por outro lado, como

$(i \circ T)$ é uma projeção, segue que $\|(i \circ T)\| \geq 1$, logo $\|(i \circ T)\| = 1$. Resultando assim, que ℓ_∞ é 1-complementado em E. $\square$

Capítulo 3

Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

3.1 Corolários do Teorema de Hahn-Banach

Apresentaremos a seguir aplicações do Teorema de Hahn-Banach. O primeiro corolário trata-se de um resultado análogo ao teorema principal, representando uma flexibilização do mesmo. Os demais corolários que serão apresentados derivam deste primeiro.

Corolário 3.1. *(Teorema de Hahn-Banach) Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Seja $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$. Note que p satisfaz as condições (2.1) e (2.2) do Teorema 2.2, visto que dados $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$p(ax) = \|\varphi\| \cdot \|ax\| = |a| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = |a| \cdot p(x)$$

e

$$p(x + y) = \|\varphi\| \cdot \|x + y\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| + \|\varphi\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y).$$

Queremos mostrar que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Assim, note que para o caso onde $x = 0$ o resultado segue de modo direto. Deste modo, suponha que $x \in G$ tal que $x \neq 0$, logo $\frac{x}{\|x\|}$ tem norma 1. Daí,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &\leq \|\varphi\| \\ \frac{1}{\|x\|}\cdot\varphi(x) &\leq \|\varphi\| \\ \varphi(x) &\leq \|\varphi\|\cdot\|x\| = p(x). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 2.2, existe $\widetilde{\varphi}: E \longrightarrow \mathbb{K}$ linear que estende φ tal que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Daí, $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq \|\varphi\|\cdot\|x\|$ para todo $x \in E$, logo $\widetilde{\varphi} \in E'$. Resta concluirmos que $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Com efeito, se $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$, então

$$\widetilde{\varphi}(x) \leq \|\varphi\|\cdot\|x\| \leq \|\varphi\|,$$

implica $\|\widetilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado, como $G \subset E$, $\|\varphi\|$ e $\|\widetilde{\varphi}\|$ são dadas, respectivamente, por:

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1,\ x \in G\}$$

e

$$\|\widetilde{\varphi}\| = \sup\{\widetilde{|\varphi(x)}| : \|x\| \leq 1,\ x \in E\},$$

ou seja $\|\varphi\| \leq \|\widetilde{\varphi}\|$, que implica em $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$ o que conclui a demonstração. □

Corolário 3.2. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Considere $G = [x_0] \subseteq E$ e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$. Note que, $\varphi(x_0) = \|x_0\|$, além disso para qualquer $x \neq 0$ em G com $x = a\cdot x_0$ para algum $a \in \mathbb{K}$, temos que

$$\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \frac{|\varphi(ax_0)|}{\|ax_0\|} = \frac{|a||\varphi(x_0)|}{|a|\|x_0\|} = \frac{\|\varphi(x_0)\|}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1,$$

logo tomando o supremo em ambos os lados, obtemos $\|\varphi\| = 1$. Assim pelo Corolário 3.1 existe um $\widetilde{\varphi}: E \longrightarrow \mathbb{K}$, extensão de φ tal que $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = 1$. Ou seja, $\|\widetilde{\varphi}\| = 1$ e $\widetilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$, para todo $x_0 \in E$. □

Corolário 3.3. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração. Para cada funcional $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| \leq 1$, é imediato que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$. Tomando o supremo, implica que $\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \leq \|x\|$. Por outro lado, seja $x \neq 0$, pelo Corolário 3.2 existe $\varphi_1 \in E'$ tal que $\|\varphi_1\| = 1$ e $\varphi_1(x) = \|x\|$. Então, $\|x\| \in \{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$, com isso $\|x\| \leq \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$. Portanto, segue que

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\},$$

e mais que isso, como $\varphi_1(x) = \|x\|$ e $\|\varphi_1\| = 1$, então

$$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

□

3.2 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach para espaços separáveis

Demonstraremos como o Teorema de Hahn-Banach garante resultados valiosos em relação aos espaços separáveis. A seguir, abordaremos como o teorema vincula a separabilidade de E por meio de seu dual E', e, juntamente a este resultado, poderemos garantir a existência de um espaço de Banach isometricamente isomorfo a qualquer espaço vetorial normado separável.

Primeiramente, relembremos que se A é um subconjunto de um espaço normado E e $x \in E$, então $dist(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$.

Proposição 3.4. *Sejam E um espaço normado, M um subespaço fechado de E, $y_0 \in E - M$ e $d = dist(y_0, M)$. Então existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(y_0) = d$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $N = M + [y_0]$. Então, para $z \in N$ existem únicos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in M$

tais que $z = x + ay_0$. Defina

$$y_0 : N \longrightarrow \mathbb{K},\ y_0(x + ay_0) = ad.$$

É claro que φ_0 é linear, $\varphi_0(M) = \{0\}$ e que $\varphi_0(y_0) = d$. Provemos que, $\|\varphi_0\| = 1$. Seja $z = x + ay_0 \in N$. Para $a \neq 0$,

$$\|z\| = \|x + ay_0\| = |a| \cdot \left\| \frac{x}{-a} - y_0 \right\| \geq d|a| = |\varphi_0(z)|,$$

e para $a = 0$ a desiguldade $\|z\| \geq |\varphi_0(z)|$ segue diretamente. Assim, $\|\varphi_0\| \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in M$ tal que $d \leq \|y_0 - x_\epsilon\| \leq d + \epsilon$. Seja $z_\epsilon = \frac{y_0 - x_\epsilon}{\|y_0 - x_\epsilon\|}$. Então, $z_\epsilon \in N$, $\|z_\epsilon\| = 1$ e

$$\varphi_0(z_\epsilon) = \frac{d}{\|y_0 - x_\epsilon\|} \geq \frac{d}{d + \epsilon}.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbtrário, segue que $\|\varphi_0\| \geq 1$, e portanto $\|\varphi_0\| = 1$. Pelo Corolário 3.1 existe $\varphi \in E'$ que estende φ_0 a E tal que $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$. □

Teorema 3.5. *Se E' é separável, então E também é separável.*

Demonstração. Seja $S_{E'}$ a esfera unitária de E', ou seja, $S_{E'} = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1\}$. Conforme mencionado anteriormente, um subconjunto de um espaço métrico separável também é separável, logo $S_{E'}$ é separável. Seja $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de $S_{E'}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in S_{E'}$ de forma que $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$. Denotemos por $M = \overline{[x_1, x_2, \ldots]}$ e provemos que $M = E$. Suponhamos, por absurdo, que M seja diferente de E e escolhamos $y_0 \in E - M$. Pela Proposição 3.4, sabemos que existe um funcional $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| = 1$ tal que $\varphi(y_0) = d = \text{dist}(y_0, M)$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Logo, temos

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \sup_{x \in B_E} |(\varphi - \varphi_n)(x)| \geq |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

No entanto, isso é um absurdo, uma vez que $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $S_{E'}$. Portanto, concluímos que $M = E$, e a separabilidade de E é garantida. □

Veremos agora que a existência de um espaço de Banach no qual podemos encontrar cópias de todos os espaços separáveis. Isso significa que tal espaço é grande o suficiente para conter representações de todos esses espaços, tornando-o um espaço de referência fundamental para estudar propriedades de espaços separáveis de forma unificada.

Observação 3.6. A volta do Teorema 3.5 não é válida pois vista que considerando $(\ell_1)' = \ell_\infty$, temos que ℓ_1 separável, no entanto, seu dual ℓ_∞ não é.

Proposição 3.7. *Todo espaço normado separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de ℓ_∞.*

Demonstração. Seja E um espaço normado separável e $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável denso em E. Podemos supor claramente que $0 \notin D$. Pelo Corolário 3.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um funcional linear $\varphi_n \in E'$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$ e $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$. Consideremos o operador

$$T : E \to \ell_\infty, \quad T(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}.$$

É evidente que $|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|\|x\| = \|x\|$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, portanto T está bem definido no sentido de que $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ para todo $x \in E$. Além disso, T é claramente linear e

$$\|T(x)\| = \sup\{|\varphi_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|, \tag{3.1}$$

o que prova, em particular, que T é contínuo. Observamos que

$$\|T(x_k)\| = \sup\{|\varphi_n(x_k)| : n \in \mathbb{N}\} \geq |\varphi_k(x_k)| = \|x_k\|, \tag{3.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Combinando (3.1) e (3.2), concluímos que $\|T(x_k)\| = \|x_k\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Devido à densidade do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e à continuidade da função $x \in E \mapsto \|T(x)\| \in \mathbb{R}$, segue que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Assim, T é um isomorfismo isométrico entre E e $T(E) \subseteq \ell_\infty$. □

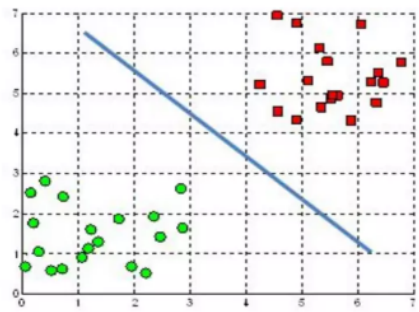
3.3 Formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Após termos abordado tanto a forma analítica, quanto a versão vetorial do Teorema de Hahn-Banach iremos nesta seção demonstrar as formas geométricas do teorema. Estes resultados afirmam que, em um espaço normado E sobre $\mathbb{R}$, se dois subconjuntos A e B não estão fortemente interligados, existe um funcional linear contínuo ϕ em E que estabelece $\phi(x) < \phi(y)$ para todos x em A e y em B. Em circunstâncias específicas, podemos até garantir que $\sup\{\phi(x) : x \in A\} < \inf\{\phi(y) : y \in B\}$. Essa perspectiva nos permite interpretar ϕ como um "separador"entre A e B, caracterizando esses resultados como Teoremas de Separação. Trata-se de uma generalização poderosa do resultado clássico que afirma que, em um espaço euclidiano, dois conjuntos convexos disjuntos podem ser separados por um hiperplano. Além disso, o teorema está intimamente ligado a questões de topologia e geometria. Ele fornece uma maneira de entender a separação de conjuntos em espaços abstratos através de propriedades lineares e normas.

Definição 3.8. Seja V um espaço vetorial não nulo. Um hiperplano de V é um subespaço $W \neq V$ tal que se W_1 é um subespaço de V e $W \subseteq W_1$, então $W_1 = V$ ou $W_1 = W$.

Exemplo 3.9. Em $\mathbb{R}^2$ os hiperplanos são retas que separam o espaço.

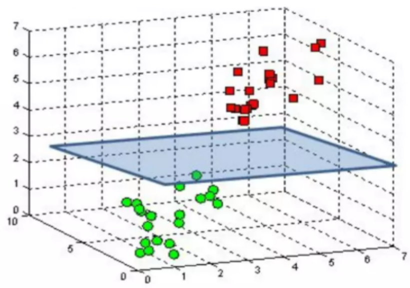
Figura 3.1: Hiperplano no $\mathbb{R}^2$



Fonte: Captura de tela

Exemplo 3.10. Em $\mathbb{R}^3$ os hiperplanos são precisamente planos que separam o espaço.

Figura 3.2: Hiperplano no $\mathbb{R}^3$



Fonte: Captura de tela

Proposição 3.11. *Sejam V um espaço vetorial, $V \neq \{0\}$, e W um subespaço de V. Então, W é um hiperplano de V se, e somente se, existe um funcional linear não nulo $\varphi : V \to \mathbb{R}$ tal que $ker(\varphi) = W$.*

Demonstração. Suponha que W seja um hiperplano de V. Como $W \neq V$, podemos escolher $v_0 \in V - W$. Tomando $W' = [W \cup \{v_0\}]$, como $W \subseteq W'$ e $W \neq W'$, temos $W' = V$. Assim, segue facilmente que cada $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como $v = u + av_0$, com $u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. É imediato que o funcional $\varphi : V \to \mathbb{R}$, definido como $\varphi(u + av_0) = a$, é não nulo, linear e $\ker(\varphi) = W$. Reciprocamente, seja $\varphi : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo tal que $\ker(\varphi) = W$. É claro que $\ker(\varphi) \neq V$, pois $\varphi \neq 0$. Seja W_1 um subespaço de V tal que $\ker(\varphi) \subseteq W_1$. Basta mostrar que se $\ker(\varphi) \neq W_1$, então $W_1 = V$. Suponha então que $\ker(\varphi) \neq W_1$ e escolha $v_0 \in W_1 - \ker(\varphi)$. Para um dado $v \in V$, tomando $u = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0$, temos $u \in \ker(\varphi) \subseteq W_1$. Agora segue que $v = u + \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \in W_1$. □

Definição 3.12. Se H é um hiperplano de V e $v_0 \in V$, o conjunto $v_0 + H = \{v_0 + v : v \in H\}$ é chamado hiperplano afim de V.

Da Proposição 3.11 segue que os hiperplanos afins de V são precisamente os conjuntos da forma $\{v \in V : \varphi(v) = a\}$, em que φ é um funcional linear não nulo em V e a é um número real. Daí, chamaremos os hiperplanos afins simplesmente de hiperplanos.

Proposição 3.13. *Seja $H = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$ um hiperplano de um espaço normado E, em que φ é um funcional linear em E e $a \in \mathbb{R}$. Então, o hiperplano H é fechado se, e somente se, o funcional linear φ é contínuo.*

Demonstração. Supondo φ contínuo, o hiperplano $H = \varphi^{-1}(\{a\})$ é fechado pois é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua. Reciprocamente, suponha que H seja fechado. Então, $E - H$ é aberto e não vazio, logo existem $x_0 \in E - H$ e $r > 0$ tais que $B(x_0; r) \subseteq E - H$. Como $\varphi(x_0) \neq a$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varphi(x_0) < a$.

Afirmação: $\varphi(x) < a$ para todo $x \in B(x_0; r)$.

De fato, se existisse $x_1 \in B(x_0; r)$ com $\varphi(x_1) > a$, tomando $t = \frac{\varphi(x_1)-a}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}$, teríamos $tx_0 + (1-t)x_1 \in B(x_0; r)$ e

$$\varphi(tx_0+(1-t)x_1) = t\varphi(x_0)+(1-t)\varphi(x_1) = \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}\varphi(x_0)+\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_1)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}\varphi(x_1) = a.$$

A afirmação segue, pois isso contradiz o fato de $B(x_0; r) \subseteq E - H$. Portanto, $\varphi(x_0) +$

$r\varphi(z) = \varphi(x_0 + rz) < a$ para todo $z \in E$ com $\|z\| < 1$. Como $\|-z\| = \|z\|$, segue que

$$\frac{\varphi(x_0) - a}{r} < \varphi(z) < \frac{a - \varphi(x_0)}{r},$$

para todo $z \in E$ com $\|z\| < 1$. Isso implica que $\|\varphi\| \leq \frac{a-\varphi(x_0)}{r}$, o que garante a continuidade de φ. □

A seguir falaremos sobre o funcional de Minkowski, que nos será útil para obtermos as formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach:

Definição 3.14. Seja C um subconjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado E. A aplicação

$$p_C : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p_C(x) = \inf\left\{a > 0 : \frac{x}{a} \in C\right\},$$

é chamada funcional de Minkowski de C.

Proposição 3.15. *O funcional de Minkowski possui as seguintes propriedades:*

(a) $p_C(bx) = bp_C(x)$ *para todo* $b > 0$ *e todo* $x \in E$.

(b) $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$.

(c) Existe $M > 0$ *tal que* $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$ *para todo* x *em* E.

(d) $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ *para quaisquer* $x, y \in E$.

Demonstração. (a) $p_C(bx) = \inf\{a > 0 : \frac{bx}{a} \in C\} = b \cdot \inf\{a > 0 : \frac{x}{a} \in C\} = bp_C(x)$.

(b) Como C é aberto, para todo $x \in C$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1 + \varepsilon)x \in C$. Assim, $\frac{x}{(1+\varepsilon)^{-1}} \in C$ e, portanto, $p_C(x) \leq (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$. Reciprocamente, se $p_C(x) < 1$, então pela definição de ínfimo existe $0 < a < 1$ tal que $\frac{x}{a} \in C$. Como C é convexo, temos $x = a \cdot \left(\frac{x}{a}\right) + (1 - a) \cdot 0 \in C$.

(c) Seja $r > 0$ tal que $B(0; r) \subseteq C$. Para $0 < s < r$, temos $s\frac{x}{\|x\|} \in C$ para todo $x \in E$, $x \neq 0$. De (a) e (b), segue que $p_C(x) \leq \frac{\|x\|}{s}$ para todo $x \in E$ não nulo. E claro que essa última desigualdade também vale para $x = 0$, e consequentemente o resultado está provado com $M = 1/s$.

(d) Sejam $x, y \in E$ e $\varepsilon > 0$ dados. Vamos mostrar que $\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} \in C$. Com efeito, por (a),

$$p_C\left(\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{p_C(x)+\varepsilon} p_C(x) < 1,$$

e por (b) segue que $\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} \in C$. Da mesma forma, $\frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C$. Como C é convexo, tomando $0 < t := \frac{p_C(x)+\varepsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} < 1$, temos

$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} = t\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C.$$

De (a) e (b), concluímos que

$$\frac{1}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} p_C(x+y) = p_C\left(\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon}\right) < 1,$$

e portanto $p_C(x+y) < p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$. O resultado segue fazendo $\varepsilon \to 0$.

□

Com isso, nosso objetivo é aplicar o Teorema de Hahn-Banach com o funcional de Minkowski tomando o papel do funcional p presente no teorema para obtermos as formas geométricas do mesmo.

Lema 3.16. *Seja C um subconjunto convexo, aberto, próprio e não-vazio do espaço normado E, e seja $x_0 \in E - C$. Então, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Demonstração. Suponha que $0 \notin C$. Escolha $z_0 \in C$, considere $D = \{x - z_0 : x \in C\}$ e chame $y_0 = x_0 - z_0$. Assim, temos $y_0 \notin D$, $0 \in D$, e D é convexo e aberto. Podemos então considerar o funcional de Minkowski p_D de D. Definindo $G = [y_0]$ e $g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos $g(x) \leq p_D(x)$ para todo $x \in G$. De fato, para $t > 0$,

$$g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0) = p_D(ty_0),$$

pela Proposição 3.15 (a). E para $t \leq 0$,

$$g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0) \leq 0 \leq p_D(ty_0),$$

pois $p_D(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Pelo Teorema 2.2, existe um funcional linear $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ e $\varphi(x) \leq p_D(x)$ para todo $x \in E$. Pela Proposição

3.15 (c), existe $M > 0$ tal que $\varphi(x) \leq p_D(x) \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$, o que garante a continuidade de φ. Da Proposição 3.15 (b), segue que $\varphi(y) \leq p_D(y) < 1$ para todo $y \in D$. Como $p_D(y_0) \geq 1$ pois $y_0 \notin D$, temos

$$\varphi(y) < 1 \leq p_D(y_0) = g(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(x_0 - z_0)$$

para todo $y \in D$. Da desigualdade anterior e da definição de D, segue que

$$\varphi(x) = \varphi(x - z_0) + \varphi(z_0) < \varphi(x_0 - z_0) + \varphi(z_0) = \varphi(x_0)$$

para todo x em C. Se $0 \in C$, basta tomar $z_0 = 0$. □

Lema 3.17. *Sejam E um espaço normado, $\varphi \in E'$ um funcional não-nulo e A um subconjunto convexo, aberto e não-vazio de E. Então, $\varphi(A)$ é um intervalo aberto (não necessariamente limitado).*

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que como $\varphi \neq 0$, então φ é sobrejetor, pois sua imagem é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$. Da linearidade de φ e da convexidade de A, segue facilmente que $\varphi(A)$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}$, ou seja, um intervalo. No caso em que o intervalo $\varphi(A)$ for limitado superiormente, chamamos de "a"sua extremidade superior. Suponhamos que $a \in \varphi(A)$. Então, existe $x \in A$ tal que $\varphi(x) = a$ e $\varphi(y) \leq a$ para todo $y \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta de centro x e raio ε está contida em A. Seja $z \in E$ um vetor não-nulo. Temos que

$$\left\| x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot (z - x) \right\| = \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot \|z\| = \frac{\varepsilon}{2} < \epsilon$$

Portanto, $x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot z$ pertence a A. Nesse caso,

$$a \geq \varphi\left(x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot z\right) = \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot \varphi(z) = a + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot \varphi(z),$$

o que nos leva a concluir que $\varphi(z) \leq 0$. Como z é um vetor não-nulo arbitrário em E, isso viola a sobrejetividade de φ, e portanto $a \notin \varphi(A)$. Analogamente, prova-se que se $\varphi(A)$ for limitado inferiormente, então $\varphi(A)$ não contém sua extremidade inferior. Portanto, temos que o intervalo $\varphi(A)$ é aberto. □

Denotaremos a notação de hiperplano $H = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$ pelo símbolo

$[\varphi = a]$.

Definição 3.18. Seja E um espaço vetorial normado e consideremos A e B contidos em E. Dizemos que o hiperplano H, $[\varphi = a]$, **separa** A e B se $\varphi(x) \leq \alpha$ para todo $x \in A$ e $\varphi(y) \geq \alpha$ para todo $y \in B$.

Dizemos que o hiperplano H **separa estritamente** A e B se existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(x) \leq \alpha - \epsilon$, para todo $x \in A$ e $\varphi(y) \geq \alpha + \epsilon$, para todo $y \in B$.

Exemplo 3.19. (i) Considere $E = \mathbb{R}^2$, e H o hiperplano $[\varphi = 0]$, onde $\varphi(x, y) = x$. Então, H separa os conjuntos $A = B_1((1, 0))$ e $B = B_1((-1, 0))$, mas não estritamente.

(ii) Para cada $\epsilon > 0$, H separa estritamente os conjuntos $A_\epsilon = B_1((1 + \epsilon, 0))$ e $B_\epsilon = B_1((-1 - \epsilon, 0))$.

(iii) H separa os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x \leq 0\}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ e } y \geq \frac{1}{x}\right\}$, mas não de modo estrito.

Teorema 3.20. *(Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach) Sejam A e B subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado E. Se A é aberto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi(x) < a \leq \varphi(y)$ para todos $x \in A$ e $y \in B$. Neste caso, diz-se que o hiperplano fechado $[\varphi = a]$ separa A e B.*

Demonstração. Chame $C = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Note que:

1. C é aberto, pois $C = \displaystyle\bigcup_{b \in B}(\{a - b : a \in A\})$.

2. C é convexo, pois para $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ e $0 < t < 1$:

$$t(x_1 - y_1) + (1 - t)(x_2 - y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2) - (ty_1 + (1 - t)y_2) \in C.$$

3. $\varnothing \neq C \neq E$, pois A e B são disjuntos e não-vazios.

Como $0 \notin C$ (pois $A \cap B = \varnothing$), pelo Lema 3.16 existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(z) < \varphi(0) = 0$ para todo $z \in C$. Logo,

$$\varphi(x) = \varphi(x - y) + \varphi(y) < \varphi(y) \tag{3.3}$$

para todos $x \in A$ e $y \in B$. Como B é não-vazio, definimos $a := \sup_{x \in A} \varphi(x)$, um número real.

É evidente que $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a]$, e a partir de (3.3) concluímos que $a \leq \varphi(y)$ para todo $y \in B$. Do Lema 3.17, sabemos que $\varphi(A)$ é um intervalo aberto, logo $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a)$, ou seja, $\varphi(x) < a$ para todo $x \in A$.

□

Teorema 3.21. *(Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach) Sejam A e B subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado E. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y)$$

para todos $x \in A$ e $y \in B$. Para $c \in (a, b)$ diz-se que o hiperplano fechado $[\varphi = c]$ separa A e B estritamente.

Demonstração. Vejamos que é possível escolher $\varepsilon > 0$ de modo que $A+B(0;\varepsilon)$ e $B+B(0;\varepsilon)$ sejam abertos, convexos e disjuntos:

1. Para qualquer escolha de $\varepsilon > 0$, os conjuntos $A + B(0;\varepsilon)$ e $B + B(0;\varepsilon)$ são abertos. De fato,
$$A + B(0;\varepsilon) = \bigcup_{\alpha \in A} (\alpha + B(0;\varepsilon)) = \bigcup_{\alpha \in A} B(\alpha;\varepsilon),$$
e o mesmo ocorre para $B + B(0;\varepsilon)$.

2. Para qualquer escolha de $\varepsilon > 0$, como A, B e $B(0;\varepsilon)$ são convexos, é imediato que os conjuntos $A + B(0;\varepsilon)$ e $B + B(0;\varepsilon)$ são convexos.

3. Basta então provar que é possível escolher ε de modo que $A + B(0;\varepsilon)$ e $B + B(0;\varepsilon)$ sejam disjuntos. Suponha que isso não seja possível. Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos conjuntos não-vazios
$$A + B\left(0; \frac{1}{n}\right) \cap T\left(B + B\left(0; \frac{1}{n}\right)\right) \neq \emptyset.$$
Logo existem sequências $(x_n)_n \subseteq A$, $(y_n)_n \subseteq B$, e sequências $(z_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq B(0; \frac{1}{n})$ tais que
$$x_n + z_n = y_n + w_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|x_n - y_n\| = \|z_n - w_n\| < \frac{2}{n} \quad (3)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como B é compacto, a sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em B, digamos $y_{n_k} \to \beta \in B$. Por (3) segue que $x_{n_k} \to \beta$. Como A é fechado, sabemos que $\beta \in A$, e assim $\beta \in A \cap B$, o que contradiz o fato de serem A e B disjuntos. Fixemos então $\varepsilon > 0$ tal que $A + B(0;\varepsilon)$ e $B + B(0;\varepsilon)$ sejam disjuntos. Pelo Teorema 3.20 existe um hiperplano fechado $[\varphi = c]$ de E que separa $A + B(0;\varepsilon)$ e $B + B(0;\varepsilon)$. Logo, para $x \in A$ e $y \in B$,

$$\varphi(x) + \sup_{\|z_1\|<\varepsilon} \varphi(z_1) \leq c \leq \varphi(y) + \inf_{\|z_2\|<\varepsilon} \varphi(z_2),$$

e, da linearidade de φ,

$$\varphi(x) + \varepsilon \sup_{\frac{\|z_1\|}{\epsilon}<1} \varphi\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right) \leq c \leq \varphi(y) + \varepsilon \inf_{\frac{\|z_2\|}{\epsilon}<1} \varphi\left(\frac{z_2}{\varepsilon}\right).$$

Disso segue que $\varphi(x) + \varepsilon\|\varphi\| \leq c \leq \varphi(y) - \varepsilon\|\varphi\|$ para todos $x \in A$ e $y \in B$. Basta tomar $a = c - \frac{\varepsilon\|\varphi\|}{2}$ e $b = c + \frac{\varepsilon\|\varphi\|}{2}$. □

Corolário 3.22. *Seja M um subespaço fechado do espaço normado E. Então, para todo $x_0 \in E - M$, existe um funcional $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Aplicando o Teorema 3.21 para $A = M$ e $B = \{x_0\}$, existem um funcional $\Phi \in E'$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\Phi(x) < c < \Phi(x_0)$ para todo $x \in M$. Mas a imagem de um subespaço por um operador linear é um subespaço do contradomínio, logo $\Phi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Assim, $\Phi(x_0) > 0$ e portanto basta tomar $\varphi = \frac{1}{\Phi(x_0)} \cdot \Phi$. □

Corolário 3.23. *Seja M um subespaço do espaço normado E. Então, para todo $x_0 \in E$, $x_0 \in \overline{M}$ se, e somente se, $\varphi(x_0) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Em outras palavras,*

$$\overline{M} = \bigcap\{\ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subseteq \ker(\varphi)\}.$$

Demonstração. Suponha $x_0 \in \overline{M}$. Para todo $\varphi \in E'$ tal que $M \subseteq \ker(\varphi)$, temos $\overline{M} \subseteq \overline{\ker(\varphi)} = \ker(\varphi)$, uma vez que $\ker(\varphi)$ é fechado. Reciprocamente, suponha que $x_0 \notin \overline{M}$.

Como $\overline{M}$ é um subespaço fechado de E, pelo Corolário 3.22 existe um funcional $\varphi_0 \in E'$ tal que $\varphi_0(x_0) = 1$ e $\varphi_0(x) = 0$ para todo $x \in \overline{M}$. Portanto, $x_0 \notin \bigcap\{\ker(\varphi) : \varphi \in E^*, M \subseteq \ker(\varphi)\}$. $\square$

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, utilizamos conceitos e teorias da Álgebra Linear, Espaços Métricos e Análise Funcional com o intuito de apresentar o Teorema de Hahn-Banach e algumas de suas aplicações. Desta forma, pudemos analisar as condições para a extensão de funcionais lineares, de modo a manter a continuidade e norma desses funcionais.

O Teorema de Hahn-Banach revelou-se uma peça-chave na teoria da Análise Funcional, destacando, sua capacidade de estender funções linearmente de subespaços para o espaço vetorial completo, preservando propriedades fundamentais. Exploramos especialmente sua versão para operadores lineares contínuos, notando sua aplicabilidade em uma ampla gama de problemas matemáticos e práticos.

A análise das formas geométricas relacionadas ao teorema proporcionou uma visão única sobre a interseção entre a teoria funcional e a geometria dos espaços vetoriais. A habilidade de estender linearmente funções de maneira contínua ganha, assim, um contexto enriquecedor quando consideramos as relações geométricas subjacentes.

A unicidade do Teorema de Hahn-Banach, abordada neste estudo, destaca a singularidade deste resultado, enfatizando sua importância em diversos contextos matemáticos. Este teorema, de certa forma, é universal em sua aplicabilidade, revelando-se uma ferramenta matemática de grande versatilidade.

Concluímos, portanto, que o Teorema de Hahn-Banach não apenas encontra-se no âmbito da abstração matemática, mas é uma ponte valiosa que conecta conceitos fundamentais de diferentes áreas.

Referências Bibliográficas

[1] ASHINO, Bárbara Sayuri. **A unicidade do teorema de Hahn-Banach e a melhor aproximação**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2011.

[2] DE OLIVEIRA, César R. **Introdução à análise funcional**. Impa, 2001.

[3] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO, E. TEIXEIRA. **Fundamentos da Análise Funcional**. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[4] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.

[5] MUJÍCA, J. **Notas de Aula de Topologia Geral**. 2003.

[6] NASCIMENTO, Carlos Alberto do. **Estudo sobre espaços de Banach e de Hilbert com aplicações em equações diferenciais, integrais e teoria da aproximação**, 2018.