UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDSON LOURENÇO DA SILVA JÚNIOR

UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA: DA ANTIGUIDADE AO SÉCULO XVIII

Recife – PE
2026

EDSON LOURENÇO DA SILVA JÚNIOR

UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA: DA ANTIGUIDADE AO SÉCULO XVIII

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em matemática.

Orientador (a): Prof. Me. Cícero Monteiro de Souza

Recife – PE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586h Silva Júnior, Edson Lourenço da.
Uma história da trigonometria: da antiguidade ao século XVIII / Edson Lourenço da Silva Júnior. – Recife, 2026.
66 f.; il.

Orientador(a): Cícero Monteiro de Souza.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2026.

Inclui referências.

1. Trigonometria . 2. Matemática - Historiografia. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Souza, Cícero Monteiro de, orient. II. Título

CDD 510

EDSON LOURENÇO DA SILVA JÚNIOR

UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA: DA ANTIGUIDADE AO SÉCULO XVIII

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em matemática.

Aprovado em: 11/02/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Cícero Monteiro de Souza (Orientador)

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa (Examinador)

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Costa (Examinador)

Universidade Federal Rural de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu Criador, Redentor e Consolador.

Ao meu pai e à minha mãe, que jamais mediram esforços para me apoiar em minha jornada acadêmica.

Ao profº César, meu professor de Matemática no 8º ano do Ensino Fundamental, e ao profº Emmanuel Alexandre, meu professor de Matemática no 3º ano do Ensino Médio, que se tornaram minhas inspirações no ensino da Matemática até os dias de hoje.

À profª Cleide Oliveira Rodrigues, que acreditou em meu potencial acadêmico e despertou em mim o prazer pela pesquisa, pela produção científica e pela contribuição à academia.

Ao profº Cícero Monteiro de Souza, meu orientador, que reconheceu em mim o apreço pela pesquisa histórica e me guiou com dedicação ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.” (Lobachevsky, citado por Vielmo, 2015).

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo expor os momentos mais importantes da história da trigonometria, evidenciando sua relação com as ciências que impulsionaram a sua emergência, em especial a astronomia, bem como com os contextos históricos que favoreceram a sua evolução. Inicialmente, são apresentados os conhecimentos empíricos encontrados entre os povos da Antiguidade, com destaque para as civilizações do Egito e da Mesopotâmia. A seguir, o modo com que estes conhecimentos foram desenvolvidos e sistematizados pelos gregos a partir de suas necessidades astronômicas é apresentado, até culminar na principal obra trigonométrica daquele tempo, o *Almagesto*, onde a trigonometria figura como acessório para a astronomia. A difusão da trigonometria grega resultou em um significativo aprofundamento entre os hindus e árabes, desenvolvendo-se as primeiras funções trigonométricas, até que ela se consolidasse como disciplina independente e recebesse organização definitiva, alcançando sua forma atual após o movimento renascentista, entre os europeus da Idade Moderna.

Palavras-chave: trigonometria; história da trigonometria; história da matemática.

ABSTRACT

This work aims to present the most important moments in the history of trigonometry, highlighting its relationship with the sciences that propelled its emergence, especially astronomy, as well as with the historical contexts that favored its evolution. Initially, the empirical knowledge found among the peoples of Antiquity is presented, with emphasis on the civilizations of Egypt and Mesopotamia. Next, the way in which this knowledge was developed and systematized by the Greeks based on their astronomical needs is presented, culminating in the main trigonometric work of that time, the Almagest, where trigonometry appears as an accessory to astronomy. The diffusion of Greek trigonometry resulted in a significant deepening among the Hindus and Arabs, developing the first trigonometric functions, until it consolidated itself as an independent discipline and received definitive organization, reaching its current form after the Renaissance movement, among Europeans of the Modern Age.

Keywords: trigonometry; history of trigonometry; history of mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A palavra *Trigonometria* resulta da união dos termos gregos *tri* (três), *gono* (ângulo) e *metria* (medida), significando literalmente "medida do triângulo". Assim, ela designa o campo da matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, colocando medidas de ângulos e medidas de segmentos em articulação direta. Nesse sentido, embora a trigonometria só tenha encontrado sua presente forma de organização a partir do século XVIII da nossa era, ao final da Idade Moderna, as origens de sua sistematização podem ser rastreadas até a Grécia Antiga, com o uso empírico de certos conceitos sendo conhecidos até mesmo desde os tempos dos grandes impérios egípcios.

A longa história de seu desenvolvimento, perpassando quase quatro milênios em três continentes diferentes, lança significativa luz sobre a forma de organização que a trigonometria encontrou ao longo do tempo, desde que, impulsionada inicialmente pelas necessidades da engenharia e, sobretudo, da astronomia, serviu de instrumento científico para responder a diversas questões acerca da ordem do universo — como serve até hoje, mantendo-se indispensável não só na engenharia e na astronomia, mas, dado o avanço da ciência e as novas necessidades do mundo moderno, em outros campos como a navegação, a física, a tecnologia e a computação. Mesmo posteriormente, quando passou a se desenvolver como um campo autônomo da matemática, sua interação com outras áreas da matemática e influência que recebeu delas ajudaram a moldá-la até que adquirisse os contornos atuais. Assim, acreditamos que o conhecimento da história da trigonometria é tanto fundamental para entender sua estrutura como ciência matemática quanto útil para perceber a sua articulação com o universo em nosso redor, aspecto que se evidencia de maneira particularmente clara em suas origens gregas.

O presente trabalho tem, portanto, por objetivo expor os momentos mais significativos das origens e evolução da trigonometria, evidenciando sua relação com as ciências que trouxeram o seu conhecimento à tona, em especial a astronomia, e com os momentos históricos que impulsionaram o seu desenvolvimento. Tal exposição resulta de acurada pesquisa e investigação a partir de fontes acadêmicas detalhadas acerca do tema e relacionados, sendo as principais fontes a obra *História da Matemática*, de Carl B. Boyer (1996), e os trabalhos de Nielce M. Lobo da Costa (2003) e Jaqueline de Oliveira (2010). Outros livros e artigos também foram amplamente consultados para aprofundar certos tópicos, recorrendo-se inclusive a publicações em outros idiomas para tópicos cuja exploração não foi mais satisfatoriamente encontrada em produções de língua portuguesa.

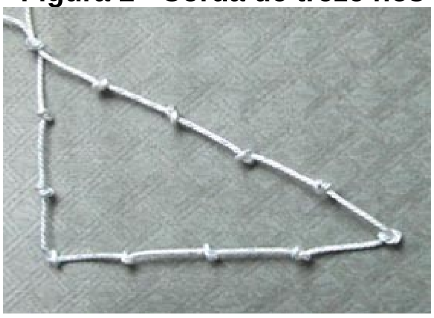
A exposição organiza-se em quatro partes: a primeira aborda os rudimentos da trigonometria encontrados nas principais civilizações da Idade Antiga; a segunda descreve o início de sua sistematização pelos gregos a partir das necessidades astronômicas que possuíam; a terceira apresenta o desenrolar do conhecimento trigonométrico entre os povos hindus e árabes e a quarta descreve o modo como a herança grega e indo-arábica culminou na constituição da trigonometria moderna pelas mãos dos europeus renascentistas e pós-renascentistas. Dois erros comuns na abordagem da história da trigonometria dificultaram a pesquisa inicial: a confusão entre Hiparco e Ptolomeu na autoria de seus respectivos resultados matemáticos e a falsa equivalência entre os conceitos de *jiva* e seno; o rigor metodológico e o cuidado com a investigação, todavia, puderam superá-los sem mais problemas. Por meio dos resultados obtidos, a trigonometria revela-se mais do que um conjunto de sentenças matemáticas, sendo produto histórico da relação entre a curiosidade humana e a necessidade de compreender e medir o mundo, ocupando, assim, posição singular na história do pensamento científico.

2 TRIGONOMETRIA NA ANTIGUIDADE: ANTECEDENTES

A Trigonometria veio a dar os seus primeiros significativos passos no desenvolvimento como uma ciência sistemática somente na Grécia Antiga, a partir dos últimos quatro séculos antes de Cristo. A sua história preliminar, todavia, pode ser rastreada até muito mais cedo, desde o terceiro milênio antes de Cristo; afinal, diversos conceitos basilares para o seu estudo, como os ângulos, as relações entre os lados de um triângulo retângulo ou as relações entre os elementos que compõem um círculo já eram, em alguma medida, há muito conhecidos e aplicados entre os povos da Antiguidade, e foram estes conhecimentos acumulados ao longo do tempo que serviram de ponto de partida para os gregos a partir do século VI a.C. No que concerne aos antecedentes da trigonometria, então, grandes centros de conhecimento matemático se destacam: a China, na Ásia Central, a Índia, no Sul da Ásia, e, com destaque ainda maior, o antigo Egito, no vale do Nilo, e a Mesopotâmia, com os diversos povos que abrigou na região do Tigre e do Eufrates.

Conforme exposto por Bright (1978), o Egito floresceu como grande civilização na Antiguidade desde a fundação do seu primeiro império no século XXIX a.C., sob as duas coroas do rei Narmer, atravessando os quase três milênios seguintes como um dos maiores e mais importantes reinos até sua queda definitiva em 31 a.C., diante dos romanos. Nele, diversos ramos da ciência encontraram notável desenvolvimento para os padrões antigos, como a engenharia, a medicina, a astronomia e, o que é de maior interesse para o presente tema, a matemática. Desenvolvendo uma escrita hieroglífica, basearam o seu sistema de contagem numa escala decimal, utilizando símbolos hieroglíficos para representar cada potência de dez. Como apresentado por Boyer (1996), elaboraram calendários, aprenderam a lidar com frações, desenvolveram métodos para as quatro operações básicas e alcançaram avanços em diversas áreas da matemática, a exemplo da resolução de sistemas de equações lineares ou do cálculo de perímetros e áreas para variadas formas geométricas. Na geometria, destacam-se ainda o conhecimento da proporção áurea, percebido, segundo Nazaré (2022), tanto nos padrões de relação de tamanho entre os blocos das pirâmides como, conforme Lima e Silva (2021), entre as dimensões internas das câmaras, e, segundo Sousa e Santos (2010), a utilização do que viriam a ser conhecidos como *ternos pitagóricos* para a construção de ângulos de 90°: sob a necessidade de usar ângulos retos na medição de terras para a agricultura, testemunha-se o costume egípcio de dar 13 nós igualmente espaçados em uma corda, criando 12 espaços de mesma medida. Daí, unindo-se o 13º nó ao 1º, estacas eram fixadas no 1º nó, no 4º e no 8º. Com o 1º e o 13º nós unidos, formava-se, ao esticar-se a corda com as três estacas, um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, com um ângulo reto aparecendo no 4º nó:

Figura 1 - Corda de treze nós



Fonte: MJ, 2013.

Este método egípcio, ilustrado com um cordão na figura 1, popularizou-se na Antiguidade, tendo se tornado conhecido, segundo Boyer (1996) até mesmo entre os hindus.

Ainda no sexto milênio, conforme Bright (1978), estabeleceram-se também as primeiras culturas na Mesopotâmia, que se tornaria o berço de diversas civilizações a dividirem o protagonismo da região, tais como a Suméria, a Acádia e a Babilônia. Esta última, com as proporções que tomou em poder e crescimento ao longo de sua história, especialmente sob os impérios de Hamurabi (1728-1686 a.C.) e Nabucodonosor II (605-562 a.C.), se tornou tão marcante para a história que convencionou-se, como visto em Boyer (1996), referir mesmo às civilizações em geral da região na Antiguidade como “babilônias”. Foram elas as responsáveis, antes mesmo dos egípcios, pela invenção da escrita. Nela, uma pequena cunha de madeira era utilizada para fazer marcas em tabletas de argila — escrita *cuneiforme* —, e a partir daí foi que também criaram o seu sistema de numeração. Diferente da egípcia, porém, eles o fizeram de base sexagesimal, provavelmente por causa do alto número de divisores que o número 60 possui. O número 7322, por exemplo, era escrito como 𒐖 𒐖 𒐖, isto é, $2{\times}60^2 + 2{\times}60^1 + 2{\times}60^0$, ou $2{\times}60^2 + 2{\times}60 + 2$. Frações sexagesimais, por sua vez, também eram representadas posicionalmente; o número 2,03333, que seria indicado pela fração 61/30, era representado como 𒐖 𒐖, para indicar $2\times60^0 + 2\times60^{-1}$, ou $2 + 2/60$. Assim, conforme Boyer (1996), descobriram também o uso das quatro operações básicas, desenvolveram um método para a aproximação da raiz quadrada, lidaram com potências, com o que hoje assemelharíamos aos logaritmos, com equações quadráticas e cúbicas e diversos conceitos geométricos. Também conheceram, assim como os egípcios, o que chamamos de *ternos pitagóricos*. Ainda, em consequência do sistema de base 60, foram eles, segundo Oliveira (2010), os responsáveis por dividir a circunferência em 360 partes.

Um importante objeto a integrar o cotidiano destes povos, bem como de vários outros, e que possibilitou um primeiro contato com certas relações trigonométricas foi o *gnômon*, nome dado à haste central do relógio de sol cuja sombra se projeta para marcar a passagem do tempo.

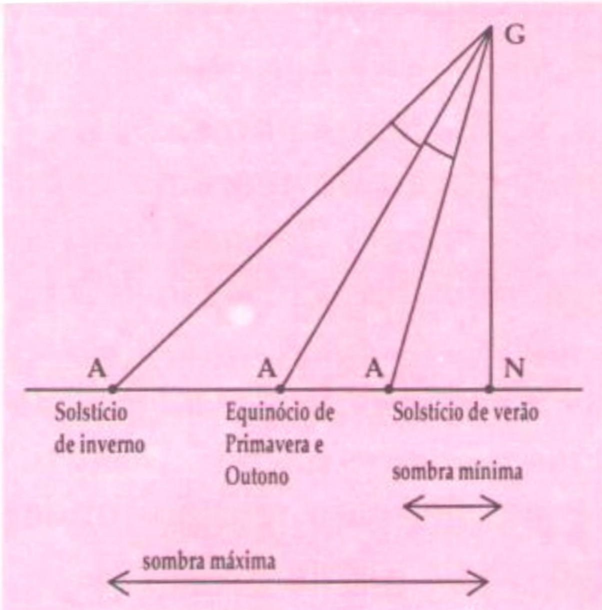
Figura 2 - Relógio de sol do século I d.C.

Fonte: Barbosa, 2020.

Na figura 2, registra-se a imagem de um relógio de sol encontrado nas ruínas de Pompeia, cidade romana que foi destruída pela erupção do Vesúvio em 79 d.C. A existência deste tipo de relógio é indicada desde o quarto milênio antes de Cristo. O mais antigo relógio de sol conhecido, por sua vez, ainda preservado em fragmentos no Museu de Berlim, é egípcio e data, conforme Barbosa (2020), do reinado de Tutmés III (1490-1436 a.C.). Sua importância na Antiguidade era notável para a astronomia, como se pode perceber não só entre os egípcios, mesopotâmios e gregos, tal como evidencia Costa (2003), mas também, como mostrado por Depuydt (1998), entre os núbios, e, como exposto por Ribeiro (2022), entre os chineses, entre os quais o gnômon foi a base para a importante obra de matemática e astronomia *Zhoubi suanjing (“Clássico de Matemática do Gnômon de Zhou”)*, de origem atribuída à Dinastia Zhou (séc. XI-III a.C.). Nela, cálculos acerca das dimensões do universo são realizados a partir da observação das sombras projetadas por um gnômon, nos quais pode-se perceber até mesmo o uso do que hoje se conhece como o *teorema de Pitágoras*.

Foi a partir dos babilônios que segundo Heródoto (séc. V a.C.), o relógio chegou ao uso dos gregos, conforme reza seu testemunho: “Quanto ao relógio de sol, ao gnômon e às doze divisões do dia, os gregos os receberam dos babilônios.” (Giguet, 1860, p.124; tradução do autor).[1] Quando vertical, formando com a base um ângulo reto, os limites de sua sombra serviam para medir a duração do ano, com os movimentos laterais medindo o dia.

Figura 3 - Marcação dos ângulos do gnômon e suas coincidências com os solstícios e equinócios



Fonte: Costa, 2003.

Como Costa (2003) observa, o crescimento da sombra do gnômon de acordo com o seu ângulo de projeção a partir do topo funcionava como uma prévia do que hoje conhecemos como *cotangente*, conforme ilustrado na figura 3, com a razão AN/GN ocorrendo em função do ângulo AĜN.

1 Conforme a tradução de Giguet (1860) para o francês.

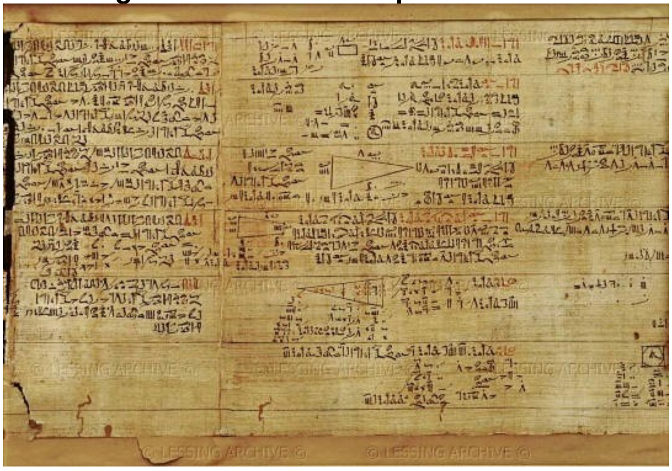
Em meio a todo o vasto desenvolvimento que a matemática teve entre os povos do mundo antigo, porém, o Egito e a Mesopotâmia são, respectivamente, a origem de duas importantes evidências materiais acerca do que poderíamos nos referir como a pré-história da Trigonometria: o famoso Papiro de Rhind, oriundo do Novo Império Egípcio (séc. XVI-X a.C.), e a Tabela Plimpton 322, proveniente do Primeiro Império Babilônio (séc. XIX-XVI a.C.).

2.1 O PAPIRO DE RHIND

O título *Papiro de Rhind* é costumeiramente dado ao rolo de papiro adquirido em 1858 pelo antiquário escocês Henry Rhind (1833-1863) na cidade de Luxor. Este rolo de aproximadamente 5 m por 30 cm, proveniente do templo funerário do faraó Ramsés II (1290-1224 a.C.), se encontra hoje, em sua maior parte, preservado no Museu Britânico. Seu prefácio[2], contudo, indica que ele trata-se, na verdade, da cópia de um documento ainda mais antigo, do reinado de Amenemhet III (1842-1797 a.C.), redigida, no século XVI a.C., por um escriba chamado Ahmes, motivo pelo qual, como Boyer (1996) destaca, também é frequentemente chamado de *Papiro de Ahmes*. Hoje, o Papiro de Rhind é o mais extenso papiro de natureza matemática conhecido, consistindo, segundo Pitzer e Fávero (2017), numa lista de mais de oitenta problemas que tratam de temas como frações unitárias, equações lineares e questões de geometria.

2 *“Este rolo foi escrito no Ano 33, mês 4 do período de inundação [...] [sob o governo do][…] Rei Aauserre [...] semelhante ao feito no tempo do Rei Nemare […]”* (Bertato, 2018, p.12), onde Nemare corresponde ao faraó Nimaetré Amenemhet III (Pereira; Silva, 2016, p.5).

Figura 4 - Folha do Papiro de Rhind



Fonte: Gaspar, 2013.

Os métodos de resolução para cada problema apresentado no papiro e os conceitos utilizados pelo autor nos revelam muito sobre a matemática dos antigos egípcios. Chama a atenção, por exemplo, o método que se observa nos problemas 48 e 50 do rolo para calcular a área de um círculo, em que se procura o valor de 1/9 do diâmetro para subtraí-lo do valor do próprio diâmetro e, por fim, elevar o resultado ao quadrado. Desse método, conforme Gillings (1972), é possível derivar para a razão entre a circunferência e o diâmetro, a que os matemáticos modernos viriam a denotar por π, um valor aproximado de 256/81 ≅ 3,16.

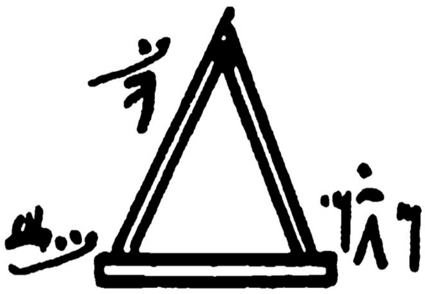
No que tange à trigonometria em si, porém, de maior interesse é o conceito de *seked,* ou *seqt*, como também é frequentemente transliterado, que aparece, segundo Gillings (1972), nos problemas 56 a 60. Vejamos, como exemplo, o problema 56, de acordo com a tradução feita por Pereira e Silva (2016), e sua resolução, cuja tradução preserva o algoritmo egípcio para multiplicação e divisão.

> Se uma pirâmide tem 250 côvados de altura e o lado de sua base tem 360 côvados de comprimento, qual é seu seked?
> A solução de Ahmes é a seguinte:
> Tome ½ de 360; dá 180. Multiplique 250 para obter 180; dá ½ + 1/5 + 1/50 de um côvado. Um côvado equivale a 7 palmos. Multiplique 7 por ½ + 1/5 + 1/50:

1	7		
½	3	½	
1/5	1	1/3	1/15
1/50	1/10	1/25	

> O seked é 5 + 1/25 palmos (Pereira; Silva, 2016, p.8-9).

Figura 5 - Ilustração presente no papiro

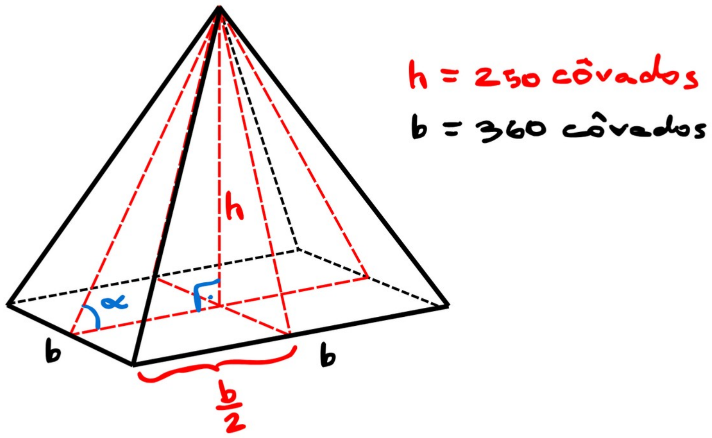


Fonte: Gillings, 1972.

A figura 5 traz a digitalização da ilustração dada pelo próprio papiro para o problema 56, descrevendo uma pirâmide reta.

Na língua portuguesa, não há, infelizmente, uma palavra que reflita o significado exato de *seked* para traduzi-la; não é difícil, todavia, notar que a resolução tomou o valor de metade da aresta da base *b* da pirâmide e dividiu-o pela sua altura *h*. Observe uma nova ilustração da pirâmide em questão:

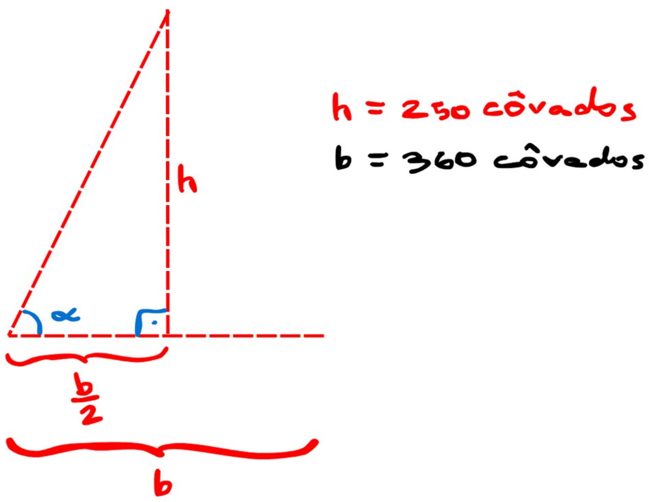
Figura 6 - Representação da pirâmide do problema 56



Fonte: O autor, 2025

Conforme a figura 6, a pirâmide mede 360 côvados na aresta de sua base e 250 côvados na sua altura. Note que a resolução do problema 56 do papiro olha para o triângulo retângulo interno cujos catetos correspondem ao apótema da base da pirâmide e à sua altura:

Figura 7 - Representação do triângulo descrito



Fonte: o autor, 2025

Percebe-se, como ilustrado na figura 7, que o problema está buscando aquilo que diríamos ser a *cotangente* do ângulo representado por α, dividindo-se o valor do seu cateto adjacente, de 250 côvados, pelo seu cateto oposto, de 180. *Seked,* assim, trata-se, de algum modo, de um conceito equivalente ao de *cotangente* do ângulo de inclinação das faces da pirâmide, embora calculado somente com as medidas da pirâmide, sem a utilização do ângulo. Do mesmo modo, solicitam, respectivamente, os problemas 57, 58 e 59 do Papiro:

> ...57: O *seked* de uma pirâmide mede 5 palmos e 1 dedo e a base mede 140 côvados. Qual é a sua altura?
> ...58: A altura de uma pirâmide é 93 + 1/9 côvados e a base mede 140 côvados. Qual é o seu *seked*?
> ...59: A altura de uma pirâmide é 8 côvados e a base mede 12 côvados. Qual é o seu *seked*? (Gillings, 1972, p.187; tradução do autor).

A existência deste conceito e necessidade de calculá-lo é interessante; como Gillings (1972) observa:

> Os operários que construíam uma pirâmide precisavam preservar suas direções com muito cuidado para obter o mesmo *seked* para cada bloco de pedra subsequente, e esta pode ser uma das razões

> pelas quais a orientação das pirâmides era tão precisa: norte-sul e leste-oeste (Gillings, 1972, p.187; tradução do autor).

Assim, existindo a necessidade de se obter um ângulo de inclinação sempre seguro para tais construções — havia, segundo Fontana (2011), um uso padrão de aproximadamente 52° —, projetá-las de modo que o valor de *seked* se aproximasse de certo valor de segurança conhecida seria uma maneira interessante de estabelecer este padrão. Aliás, tal como Gillings (1972) expõe, o fato de que os ângulos de inclinação das pirâmides dos problemas 56 a 59, se calculados, são, respectivamente, de aproximadamente 54°, 53°, 53° e 53°, apoia este pensamento, dado que estão todos próximos dos 52° referidos — este também é, inclusive o valor médio do ângulo de inclinação das três grandes pirâmides de Gizé.

2.2 A TABELA PLIMPTON 322

Enquanto os primeiros conceitos ligados à trigonometria surgiram entre os egípcios demandados pelas necessidades da engenharia e da arquitetura, a aparição de antecedentes deste campo entre os mesopotâmios foi, de acordo com Oliveira (2010), fomentada principalmente pelo interesse na astronomia e na medição do tempo. Conforme Boyer (1998), é nesse contexto que se insere a tableta da Plimpton Collection da Universidade de Columbia, Nova York, costumeiramente nomeada como Plimpton 322.

Figura 8 - Tabela Plimpton 322

Fonte: Cristo, 2018.

Nota-se pelas marcas de quebra na margem esquerda que a tableta não foi completamente preservada, e o que temos hoje é apenas o lado direito dela. Na porção que restou, todavia, permanece uma tabela de 15 linhas, ordenadas de 1 a 15 na primeira coluna (à direita), com quatro colunas sobreviventes, que relacionam os valores dispostos na segunda, terceira e quarta colunas:

Tabela 1 - Tabela Plimpton 322, em notação moderna

[1; 59, 0,] 15	1, 59	2, 49	1
[1; 56, 56,] 58, 14, 50, 6, 15	56,7	0	2
[1; 55, 7,] 41, 15, 33, 45	0	0	3
[1;] 5[3, 1]0, 29, 32, 52, 16	0	0	4
[1;] 48, 54, 1, 40	1,5	1,37	5
[1;] 47, 6, 41, 40	5,19	8,1	6
[1;] 43, 11, 56, 28, 26, 40	38,11	59,1	7
[1;] 41, 33, 59, 3, 45	13,19	20,49	8
[1;] 38, 33, 36, 36	0	12,49	9
1; 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	0	0	10
1; 33, 45	45	1,15	11
1; 29, 21, 54, 2, 15	27,59	48,49	12
[1;] 27, 0, 3, 45	0	4,49	13
1; 25, 48, 51, 35, 6, 40	29,31	53,49	14
[1;] 23, 13, 46, 40	56	0	15

Fonte: O autor, 2025

A tabela 1 segue, em notação moderna, a proposta de reconstrução de Otto Neugebauer (1899-1990) disposta no trabalho de Oliveira (2010). Para as duas colunas centrais, os números representam valores inteiros em numeração sexagesimal; o número *1, 59*, por exemplo, descreve o número $1 \times 60 + 59$. Para a coluna à esquerda, os números representam frações sexagesimais, sendo a parte inteira sempre 1 e os valores após ele, separados por ponto e vírgula (;), as posições sexagesimais fracionárias; o número *1; 33, 45*, por exemplo, descreve o número $1 + 33/60 + 45/60^2$. As porções danificadas estão restauradas entre colchetes.

Se convertermos cada valor para o nosso sistema decimal e reordenarmos as colunas da esquerda para a direita, obteremos (com os valores da coluna correspondente à das frações sexagesimais arredondados até a quarta casa decimal):

Tabela 2 - Tabela Plimpton 322 reordenada, em sistema decimal

1	169	119	1,9834
2	4825	3367	1,9492
3	6649	4601	1,9188
4	18541	12709	1,8863
5	97	65	1,8150
6	481	319	1,7852
7	3541	2291	1,7200
8	1249	799	1,6846
9	769	481	1,6427
10	8161	4961	1,5861
11	75	45	1,5625
12	2969	1679	1,4894
13	289	161	1,4500
14	3229	1771	1,4302
15	106	56	1,3872

Fonte: O autor, 2025.

Ao investigar o propósito da Tabela, então, não é difícil perceber, conforme a tabela 2, que as duas colunas do centro listam, em cada linha, nada mais, nada menos, do que o maior e o menor valor de diversos ternos pitagóricos. O que há de impressionante, porém, é que, ao chamarmos, para cada terno, o maior valor de *a*, o valor intermediário (ausente da Tabela) de *b* e o menor valor de *c*, percebemos que a quarta e última coluna lista precisamente os valores de $(a/b)^2$. E mais: se olharmos de uma perspectiva geométrica, onde *a*, *b* e *c* são os lados de um triângulo retângulo e α é o ângulo entre *a* e *b*, temos que o que está disposto na coluna final equivale justamente ao que chamaríamos de $\sec^2 \alpha$!

Tabela 3 - Valores de a, b, c, a/b e (a/b)²

	a	b	c	a/b	(a/b)²
1	169	120	119	1,4083	1,9834
2	4825	3456	3367	1,3961	1,9492
3	6649	4800	4601	1,3852	1,9188
4	18541	13500	12709	1,3734	1,8863
5	97	72	65	1,3472	1,8150
6	481	360	319	1,3361	1,7852
7	3541	2700	2291	1,3115	1,7200
8	1249	960	799	1,3010	1,6846
9	769	600	481	1,2817	1,6427
10	8161	6480	4961	1,2594	1,5861
11	75	60	45	1,25	1,5625
12	2969	2400	1679	1,2204	1,4894
13	289	240	161	1,2042	1,4500
14	3229	2700	1771	1,1960	1,4302
15	106	90	56	1,1778	1,3872

Fonte: O autor, 2025.

Na tabela 3, os valores ausentes de *b* e *a/b*, que estão ausentes da tableta preservada, foram acrescidos em fonte vermelha, auxiliando a percepção da relação entre os valores da tableta.

Mais relevante ainda é o fato de que a Tabela foi organizada de modo que os valores de (*a/b*)² estejam, de cima para baixo, em ordem decrescente. De fato, da primeira à última linha, os seus valores correspondem, aproximadamente, aos valores dos quadrados das secantes dos ângulos de 45° a 31°. Embora a Tabela não lide com ângulos, isto também não pode ser fruto do acaso; no mínimo, indica, como Boyer (1996) observa, que triângulos retângulos estavam em vista sob cada terno. Em essência, a Tabela Plimpton 322 nada mais traz do que, anacronicamente falando, uma tabela de secantes!

Todo este conhecimento, todavia, decorria unicamente da experiência acumulada dos cálculos dos antigos, sem que demonstrações lógicas fossem oferecidas para estabelecê-los. Foi este conhecimento, no entanto, que impulsionou os primeiros passos na organização da trigonometria do modo que a conhecemos; estes passos, por sua vez, foram dados, inicialmente, entre os da antiga Grécia.

3 GRÉCIA ANTIGA: O NASCIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Por volta do século XVIII a.C., quando o Império Médio Egípcio e o Primeiro Império Babilônio viviam os seus respectivos auges, começavam a se estabelecer na região do mar Egeu uma sucessão de povos que viriam a formar uma das civilizações mais significativas da história, cujo legado perdura até hoje: a Grécia. Derivadas principalmente do encontro de aqueus, jônios, eólios e dórios, conforme Figueira (2013), as sociedades gregas viram crescente desenvolvimento econômico a partir do século VIII a.C., até encontrar seu ápice no século V a.C., quando o Império Persa imperava no Oriente. Desde então, e principalmente a partir do século IV a.C., a Grécia foi berço de um sem-número de filósofos, poetas, matemáticos, astrônomos e cientistas, fazendo ressoar o seu impacto de sua existência não só sobre o seu tempo — até mesmo quando ficava sob o domínio das outras nações, tal como se pode observar pela profunda influência de sua cultura sobre os impérios Macedônio e Romano —, mas também sobre toda a história do mundo ocidental.

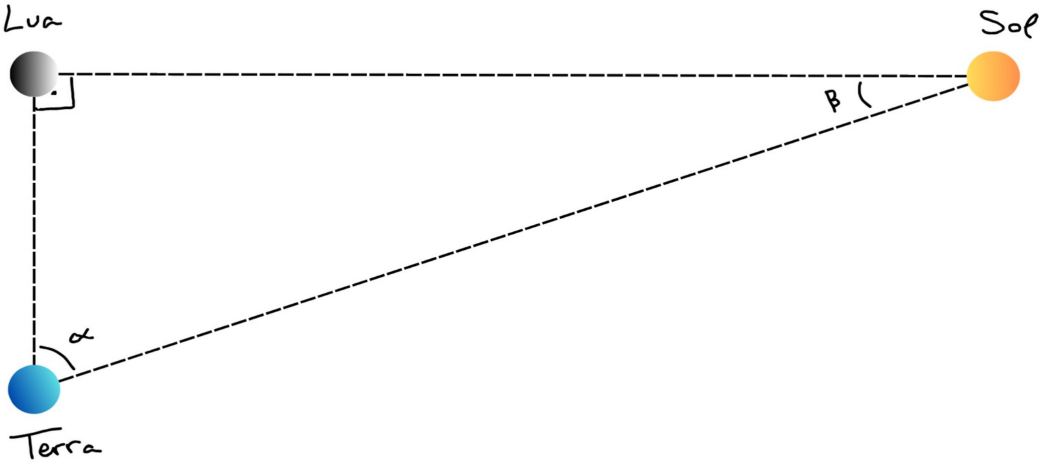
No que tange à matemática, os gregos a herdaram, inicialmente, principalmente das nações do Oriente já estabelecidas, tal como herdaram o alfabeto. Já no século VI a.C., todavia, duas figuras de singular importância tornaram-se responsáveis por dar o impulso que a transformaria — e, com ela, a matemática do mundo inteiro — para sempre: Tales de Mileto (624-548 a.C.) e Pitágoras de Samos (580-500 a.C.), dupla a quem Boyer (1996) atribui, para a matemática, papel semelhante ao que Homero e Hesíodo tiveram para a literatura. Tendo ambos vivido em pleno contato com as culturas egípcia e babilônia, visitando inclusive estas nações, eles absorveram muito do conhecimento matemático e astronômico já desenvolvido, e puderam, a partir disto, construir novos degraus no desenvolvimento da matemática como um todo. A Tales, de quem Heródoto alega ter previso um eclipse solar em 585 a.C. (Giguet, 1860, p.29), atribuíram-se diversos teoremas da geometria, tais como os que afirmam que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais ou os teoremas que moldam os conceitos de ângulos opostos ao vértice e de congruência de triângulos via critério ângulo-lado-ângulo. A tradição, segundo Boyer (1996), atribui ainda a ele estudos de semelhança de triângulos que, segundo as lendas, teriam lhe permitido medir a altura das pirâmides do Egito e a distância de navios em alto-mar. A Pitágoras, por sua vez, e à sua escola, devem-se, ainda conforme Boyer (1996), o desenvolvimento do estudo da “proporção áurea” a partir do pentagrama e do famoso Teorema de Pitágoras, que enuncia que o quadrado da medida *a* do lado maior do triângulo retângulo é igual à soma das medidas *b* e *c* dos dois lados menores ($a^2 = b^2 + c^2$). Embora esta informação já fosse muito conhecida antes dele — como observamos no uso dos *ternos pitagóricos* pelos egípcios e babilônios —, o teorema permanece ligado a ele pelo nome até hoje na memória histórica.

Tales e Pitágoras deram início a uma verdadeira era de entusiastas e curiosos pela matemática que se lançaram a descobrir e estabelecer os fundamentos da sua sistematização, estudando, inclusive, muitos novos conceitos que, à semelhança do *seked* egípcio, serviram de equivalentes a outros que seriam desenvolvidos na trigonometria. No que tange à geometria, os trabalhos de homens como Euclides de Alexandria (séc. IV-III a.C.), autor da magistral obra *Os Elementos*, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) e Apolônio de Perga (262-190 a.C.) foram cruciais. Assim como ocorreu entre os babilônios, porém, seria a astronomia a responsável por trazer à tona a necessidade de encontrar as relações existentes entre os ângulos e as medidas conhecidas dos triângulos: as relações trigonométricas.

3.1 ARISTARCO DE SAMOS E AS DISTÂNCIAS DO SOL E DA LUA

Com a chegada do século III a.C., o interesse pela aplicação da geometria ao estudo dos astros levou Aristarco de Samos (310-230 a.C.) à tentativa de calcular as distâncias entre a Terra, a Lua e o Sol, feito que ele descreve em sua obra *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua,* escrita por volta de 260 a.C. Aristarco notou que, quando a Lua está iluminada pelo Sol exatamente pela metade, com a outra metade escura (o que ocorre nas fases lunares que chamamos de *quarto crescente* e *quarto minguante*), a Terra, o Sol e a Lua compõem um triângulo retângulo com a Lua posicionada no ângulo reto:

Figura 9 - Ilustração do triângulo formado pelo Sol com a Lua e a Terra nas fases de quarto crescente e quarto minguante

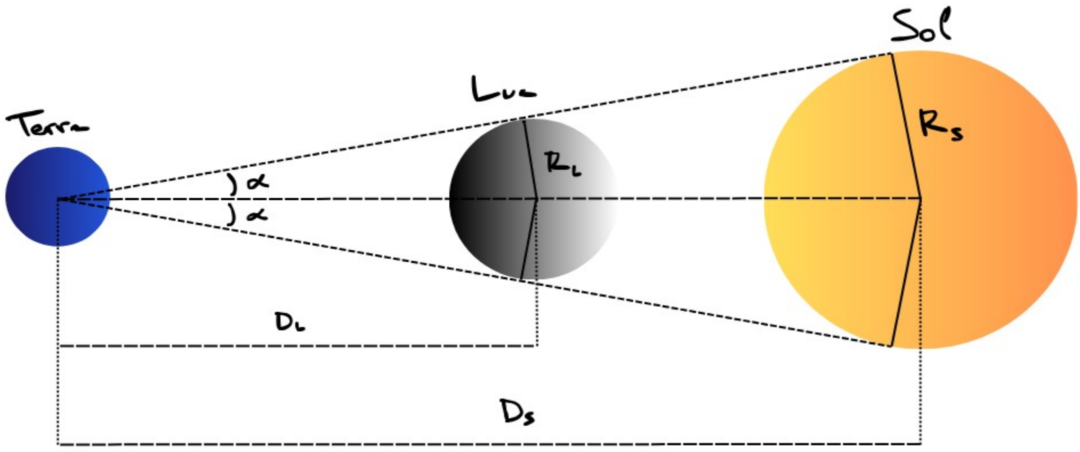


Fonte: O autor, 2025.

Medindo o valor do ângulo α ilustrado na figura 9, Aristarco observou que ele diferia “para menos de um ângulo reto por um trintavos de um quadrante” (Boyer, 1996, p.108); não sendo ainda a divisão do círculo em 360° de uso comum pelos gregos naquele tempo, esta era a sua maneira de descrever o ângulo de 87°. Assim, sabendo-se já que a soma dos três ângulos internos deveria ser, anacronicamente falando, de 180°, foi fácil concluir que o ângulo β seria o equivalente a 3°. Então, Aristarco deduziu, com base em teoremas ligados à semelhança de triângulos, que o valor da razão entre a distância Sol-Terra e a distância Terra-Lua seria algo entre 18 e 20 — na trigonometria moderna, isto seria equivalente a calcular que o sen 3° está entre 1/18 e 1/20 —, entendendo que o Sol estaria entre 18 e 20 vezes mais distante da Terra que a Lua. Esta razão está longe de ser precisa, dado que o Sol é aproximadamente 390 vezes mais distante do que a Lua, mas isto se deve ao pequeno erro de medição do ângulo α feito por Aristarco, que é, na verdade, de aproximadamente 89° 50’. O método desenvolvido por ele, todavia, era brilhante e, não fosse o erro de medição do início, Aristarco teria calculado a razão exata.

Aristarco se dedicou, ainda, a calcular os tamanhos da Lua e do Sol. Do fato de que o Sol e a Lua aparentam, para quem observa da superfície terrestre, ter o mesmo tamanho, ele obteve que a razão entre os tamanhos dos dois astros era a mesma entre suas distâncias. A melhor situação para demonstrá-lo é o eclipse solar total, em que a Lua cobre inteiramente o Sol:

Figura 10 - Ilustração das posições do Sol, da Terra e da Lua num eclipse solar total

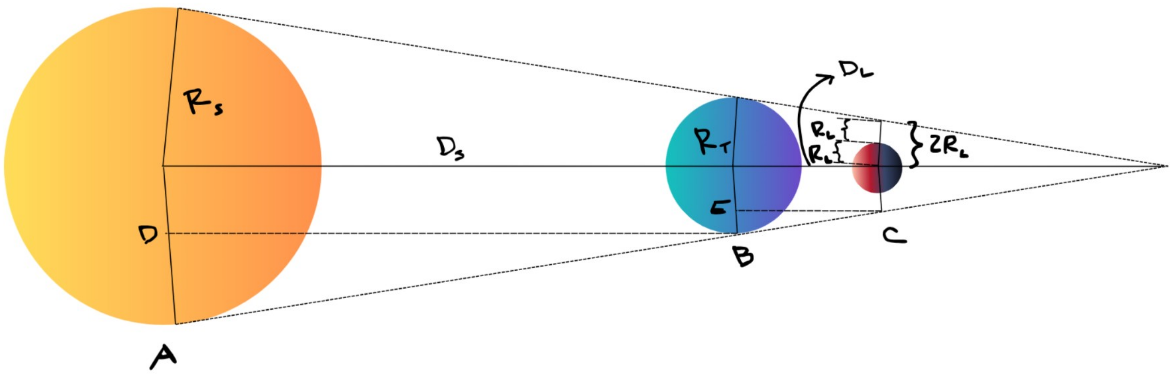


Fonte: O autor, 2025.

Conforme a figura 10, sendo D_S a distância entre a Terra e o Sol, D_L a distância entre a Lua e a Terra, R_S o raio do Sol e R_L o raio da Lua, é possível perceber que, por semelhança de triângulos, a razão entre R_L e R_S será igual à razão entre D_L e D_S. Como Aristarco havia calculado que era entre 18 e 20 — aproximadamente 19 —, chegou à conclusão de que o Sol deveria ser cerca de 19 vezes maior que a Lua.

A seguir, como Boyer (1996) descreve, ele concluiu, ao observar eclipses lunares, que a sombra da Terra sobre a Lua tinha duas vezes o tamanho da própria Lua. A partir daí, simplificando consideravelmente os seus raciocínios, seria possível o seguinte esquema, com R_T sendo o raio da Terra:

Figura 11 - Ilustração das posições do Sol, da Terra e da Lua num eclipse lunar total



Fonte: O autor, 2025.

Sendo, conforme a figura 11, os triângulos ABD e BCE semelhantes, D_S = DB, D_L = EC, AD = $R_S - R_T$ e BE = $R_T - 2R_L$:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} \rightarrow \frac{R_S - R_T}{DB} = \frac{R_T - 2R_L}{EC} \rightarrow \frac{EC}{DB} = \frac{R_T - 2R_L}{R_S - R_T}$$

$$\rightarrow \frac{D_L}{D_S} = \frac{R_T - 2R_L}{R_S - R_T}$$

Usando que $D_S = 19D_L$ e $R_S = 19R_L$, tem-se que

$$\frac{D_L}{19D_L} = \frac{R_T - 2R_L}{19R_L - R_T} \rightarrow \frac{1}{19} = \frac{R_T - 2R_L}{19R_L - R_T} \rightarrow$$

$$19(R_T - 2R_L) = 19R_L - R_T \rightarrow$$

$$19R_T - 38R_L = 19R_L - R_T \rightarrow$$

$$19R_T + R_T = 19R_L + 38R_L \rightarrow$$

$$20R_T = 57R_L \rightarrow$$

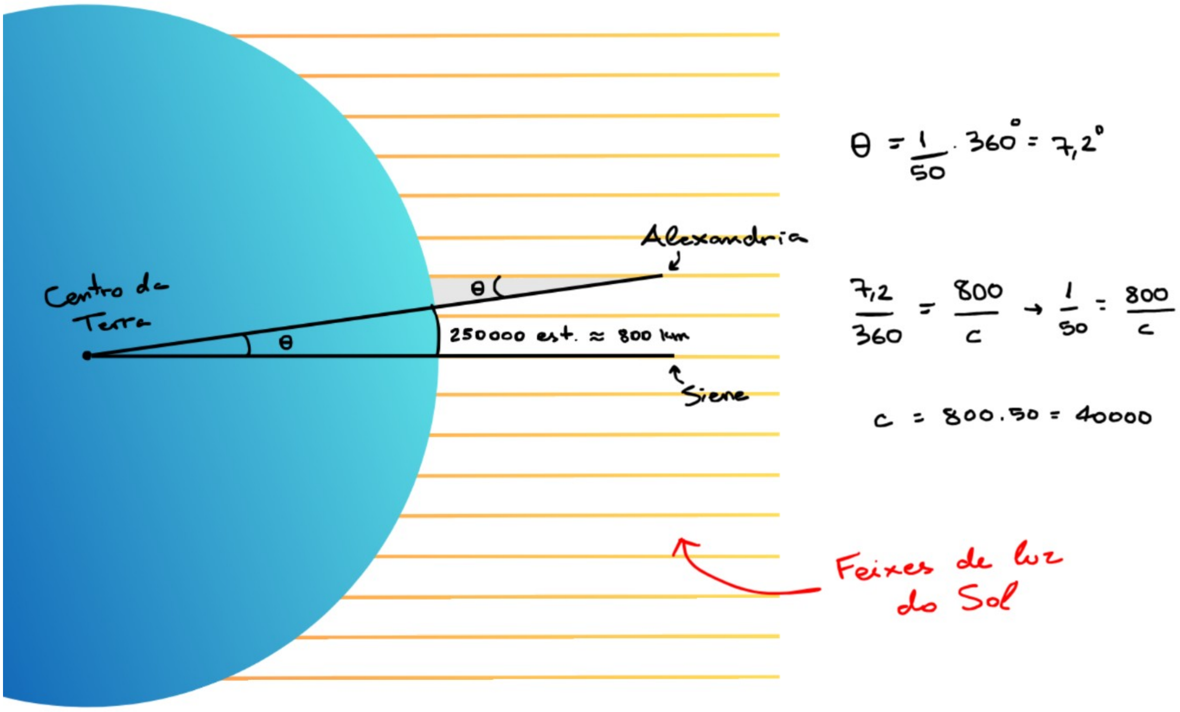
$$\frac{20R_T}{57} = R_L$$

Assim, Aristarco foi capaz de escrever o raio da Sol em função do raio da Lua, e este, em função do raio da Terra. Para solucionar todas as equações, bastaria determinar a medida do próprio raio terrestre, descoberta que caberia aos resultados de outro importante matemático da época: Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.).

3.2 ERATÓSTENES DE CIRENE E AS MEDIDAS DO TAMANHO DA TERRA

No reinado de Ptolomeu III (246-221 a.C.), Eratóstenes, nascido em Cirene e crescido em Atenas, havia se destacado, conforme Boyer (1996), em diversas áreas como poesia, astronomia, história, matemática e atletismo, foi convidado para lecionar em Alexandria. Uma vez no Egito, notou como, ao meio-dia do solstício de verão, a projeção da luz do Sol sobre um poço profundo de Siene (atual Assuã) não deixava sombra; em Alexandria, aproximadamente 5000 estádios ao norte, porém, no mesmo horário e data, a luz do sol projetava sombras de ângulos de um quinquagésimo de um círculo — 7,2°, ou 1/50 de 360°:

Figura 12 - Esquema da observação de Eratóstenes



Fonte: O autor, 2025.

Conforme a ilustração da figura 12, Eratóstenes tinha noção de que o Sol estava, como Aristarco havia constatado, longe o suficiente da Terra para que os seus raios chegassem à superfície terrestre praticamente paralelos. Isto permitiu que Eratóstenes concluísse, a partir da congruência do que hoje se denomina como ângulos alternos internos, que o setor circular determinado pelo centro da Terra e os raios que o ligam às cidades de Siene e Alexandria têm, do mesmo modo, um ângulo central de 7,2°. Assim, Eratóstenes compreendeu que, sendo a distância entre Alexandria e Siene o arco do setor em questão, esta era, portanto, 1/50 da circunferência da Terra, e, uma vez que as duas cidades distavam aproximadamente 5000 estádios, a circunferência da Terra seria de cerca de 5000×50 = 250000 estádios — ou, tomando a distância real de quase 800 km entre as duas cidades, cerca de 800×50 = 40000 km.

De acordo com Boyer (1996), embora outras tentativas de calculá-la já houvessem sido feitas, como Aristóteles (384-322 a.C.) e Arquimedes registram, por outras pessoas, nenhuma havia sido tão bem sucedida e se aproximado tanto da sua verdadeira medida — cerca de 40076 km. Conhecendo-se a medida da circunferência da Terra, assim, bastaria dividi-la pelo dobro de π — razão que Arquimedes, contemporâneo de Eratóstenes, foi capaz de precisar em até duas casas decimais, obtendo $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$ —, para encontrar o raio da Terra — aproximadamente 6369 km, valor próximo dos cerca de 6378 km que o raio da Terra possui.

Ao articular diretamente o ângulo central de um setor circular da terra com a medida do próprio arco correspondente, assim, o trabalho de Eratóstenes foi fundamental em notar a existência de uma relação de medida entre as duas, isto é, entre o arco da circunferência e seu ângulo central, e, consequentemente, dado que arco e corda estão ligados, entre uma corda descrita no círculo e o ângulo central associado a ela. Conhecer tais relações teria facilitado em muito o trabalho realizado por Aristarco, por exemplo, ao lidar com a razão entre os lados do triângulo ao conhecer seus ângulos internos. A necessidade de estudar as relações existentes entre ângulos e medidas de comprimento associados, assim, começava a ser percebida.

3.3 HIPARCO DE NICEIA E A PRIMEIRA TABELA DE CORDAS

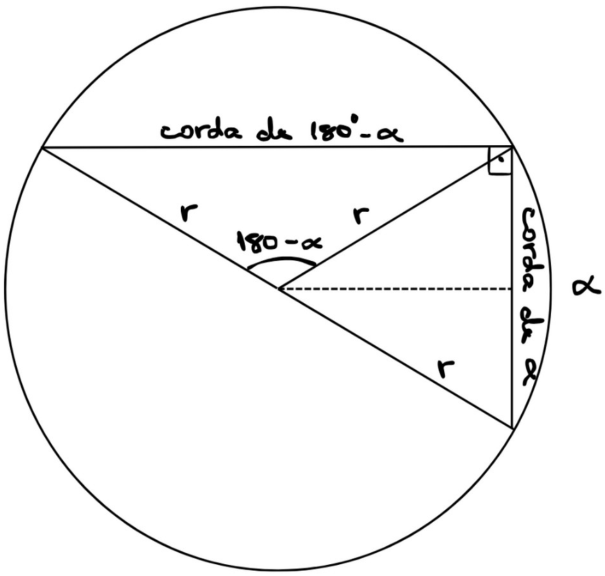
Uma vez que, até o início do século II a.C., todos os cálculos e aplicações geométricas, tais como os que foram expostos aqui, nunca estabeleciam uma relação direta dos ângulos dos triângulos com as medidas dos seus lados, também nunca se pôde falar, como Oliveira (2010) destaca, de uma trigonometria sistemática, ainda que conceitos que podem se chamar de trigonométricos, como os que já foram abordados, estivessem em uso, e que o trabalho de Eratóstenes evidenciasse, finalmente, a possibilidade de associação entre segmentos e ângulos. Conforme Boyer (1996), foram, então, os trabalhos de Hiparco de Niceia (180-125 a.C.), autor da primeira tabela trigonométrica conhecida — que lhe rendeu o título de “pai da trigonometria” (Boyer, 1996, p.10) —, que mudaram isto definitivamente.

Interessado pelas questões astronômicas, Hiparco também se pôs a estudá-las, e, para facilitar os cálculos nas medições feitas entre os astros, ideou construir uma tabela com diversos valores já calculados de cordas para cada arco;

assim, conforme a necessidade, já haveria um material pronto à mão para ser usado nos cálculos astronômicos. Herdando, por meio dos trabalhos de Hipsícles (190-120 a.C.), a divisão do círculo em 360° feita pelos babilônios, Hiparco adotou também, como mencionado por Oliveira (2010), a notação sexagesimal para a divisão dos ângulos em 60 e em 3600 partes iguais — o que hoje chamamos, respectivamente, de minutos (') e segundos ("). Daí, tomando a circunferência como 360°×60' = 21600' e a aproximação de 3,1416 para π, obteve, sabendo que o comprimento da circunferência vale 2πr, que r vale aproximadamente 3438'. Com isso, passou a calcular os valores de cada corda em minutos, como descrito a seguir.

Inicialmente, sabendo que a corda de um arco de 60° forma, com os raios extremos, um triângulo equilátero, Hiparco definiu que a corda de 60° mede o mesmo que o raio do círculo, isto é, 3438'. Semelhantemente, percebeu que a corda de um arco de 90° forma com os raios um triângulo retângulo isósceles, o que lhe permitiu calcular r√2 = 3438' e obter também a corda de 90° como 4862'. Seria conveniente, todavia, em vez de trabalhar corda por corda, desenvolver uma fórmula geral.

Figura 13 - Círculo com cordas dos ângulos α e 180° – α

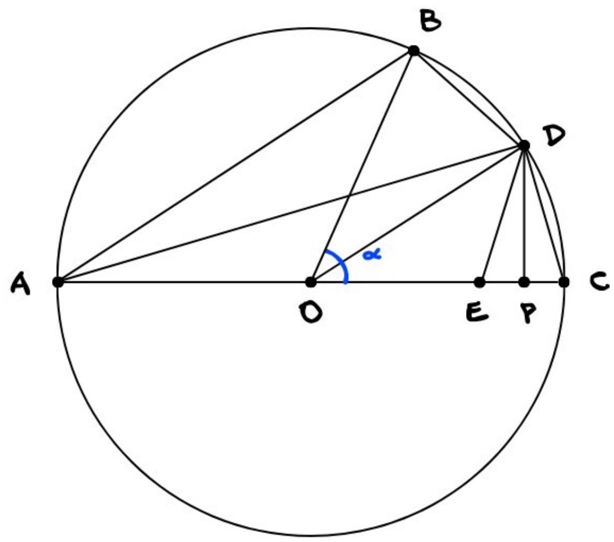


Fonte: O autor, 2025.

Como ilustrado na figura 13, Hiparco notou que a corda (abrev.: crd) de um ângulo α e a corda do seu ângulo suplementar formam com o diâmetro do círculo um triângulo retângulo. Assim, ao aplicar a ele o Teorema de Pitágoras, Hiparco conseguiu estabelecer a fórmula $(2r)^2 = crd^2(180 - \alpha) + crd^2(\alpha)$.

Hiparco foi capaz também de elaborar uma fórmula para o cálculo da corda do arco metade, conforme se ilustra e descreve adiante:

Figura 14 - Ilustração para o cálculo da corda do arco metade



Fonte: O autor, 2025.

Conforme a figura 14, considere-se o círculo de centro O com os pontos A, B e C marcados em sua circunferência tais que AC seja o diâmetro do círculo e BÔC determine o ângulo α. Tome-se também o ponto D sobre a circunferência de modo que OD seja bissetriz de α. Temos que BÔD = DÔC. Tome-se o ponto E em AC tal que AE ≡ AB. Como OB ≡ OD ≡ OC, os triângulos BOD e DOC são congruentes e BD ≡ DC; logo, DÂB = DÂC e DÂC = DÂE. Ainda, como DC ≡ BD e BC ≡ DE, o triângulo DCE é isósceles. Tomando-se P o pé da altura do triângulo DCE, temos EP ≡ PC. Assim:

$$PC=\frac{1}{2}(AC-AE)=\frac{1}{2}(AC-AB)\rightarrow PC=\frac{1}{2}(2r-crd(180-\alpha))$$

Nota-se também que os triângulos ACD e CPD são semelhantes, dado que ambos são retângulos e DĈP = DĈA. Logo:

$$\frac{AC}{CD}=\frac{CD}{PC}\rightarrow CD^2=AC\cdot PC$$

Assim,

$$crd^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=CD^2=AC\cdot PC=2r\left(\frac{1}{2}\cdot(2r-crd(180-\alpha))\right)=r(2r-crd(180-\alpha))$$

$$\rightarrow crd\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{r\left(2r-crd\left(180-\alpha\right)\right)}$$

Assim, conforme Oliveira (2010), tendo em mãos as fórmulas para as cordas do arco e do arco metade (com outras notações, é claro), Hiparco foi capaz de calcular e tabelar, de 7,5° em 7,5° graus, cordas os ângulos de 0°, 7,5°, 15°, 22,5°, 30° e assim por diante, até 180°:

Figura 15 - Tabela de cordas de Hiparco

θ	$crd\,(\theta)$	Corda em Função do Raio
$0°$	0	$0r$
$7\frac{1}{2}°$	450	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
$15°$	897	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
$22\frac{1}{2}°$	1341	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$30°$	1780	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$37\frac{1}{2}°$	2210	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
$45°$	2631	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$52\frac{1}{2}°$	3041	$r\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
$60°$	3438	r
$67\frac{1}{2}°$	3820	$r\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
$75°$	4186	$r\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
$82\frac{1}{2}°$	4533	$r\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
$90°$	4862	$r\sqrt{2}$
$97\frac{1}{2}°$	5169	$r\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
$105°$	5455	$r\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
$112\frac{1}{2}°$	5717	$r\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
$120°$	5954	$r\sqrt{3}$
$127\frac{1}{2}°$	6166	$r\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
$135°$	6352	$r\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$142\frac{1}{2}°$	6511	$r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
$150°$	6641	$r\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$157\frac{1}{2}°$	6743	$r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$165°$	6817	$r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
$172\frac{1}{2}°$	6861	$r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
$180°$	6875	$2r$

Fonte: Silva, 2022.

Conforme a dedução de Silva (2022), a figura 15 lista, em notação moderna, a tabela de cordas feita por Hiparco, escritas em função do raio *r.*

Relacionando diretamente, assim, os ângulos com as cordas associadas, nascia, com Hiparco, a trigonometria. Seu trabalho seria fundamental para a produção da mais importante obra de trigonometria da Antiguidade: o *Almagesto*, da autoria de Ptolomeu de Alexandria (c.90-168 d.C.).

3.4 PTOLOMEU DE ALEXANDRIA E O ALMAGESTO

Quase trezentos anos depois de Hiparco, já no século II d.C., Ptolomeu de Alexandria escreveu aquilo que, segundo Boyer (1996), viria a ser a “bíblia” dos astrônomos da época: a *Syntaxis Mathematica*; trata-se de uma coleção de treze livros com aplicações matemáticas na astronomia, e que foi fortemente inspirada nas obras deixadas por Hiparco de Niceia. O trabalho de Ptolomeu traz “descrições matemáticas completas sobre a posição dos planetas através do modelo grego, com parâmetros para vários movimentos do sol, da lua e dos planetas” (Oliveira, 2010, p.24) incluindo, especialmente no primeiro livro, proposições de geometria esférica estudadas por Menelau de Alexandria (c.100 d.C.), métodos para calcular o comprimento das cordas e construções da tabela de cordas.

Ptolomeu utilizou a notação sexagesimal para os ângulos e, fazendo uso de teoremas deixados por Euclides, foi capaz de realizar cálculos e demonstrações que lhe permitiriam construir uma tabela ainda mais completa do que a de Hiparco.

Como Oliveira (2010) relata, Ptolomeu deduziu de um teorema deixado por Euclides que, dados um hexágono e um decágono regulares inscritíveis em um mesmo círculo, pode-se afirmar que, em linguagem moderna, sendo *r* a medida do lado do hexágono — que também é a medida do raio *r* do círculo —, e *s* a medida do lado do decágono,

$$\frac{s}{r}=\frac{r-s}{s} \rightarrow s^2=r^2-rs \rightarrow s^2+rs-r^2=0$$

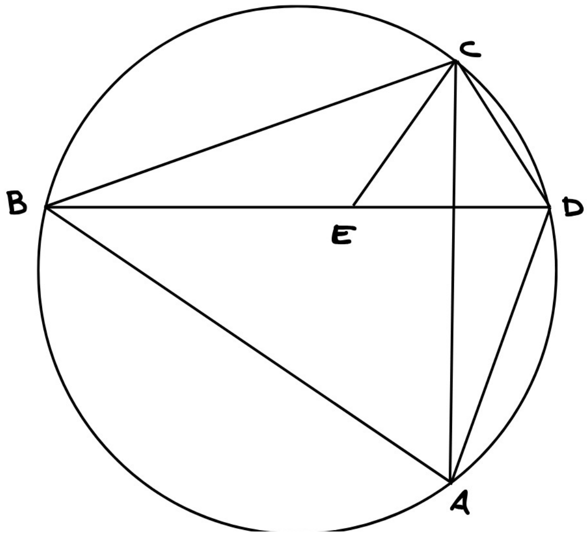
$$\rightarrow s=\frac{-r+\sqrt{5}r}{2} \rightarrow \frac{s}{r}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad ,$$

que é o inverso da razão áurea $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \cong 1{,}618$, isto é, $\phi^{-1} \cong 0{,}618$. Conhecendo esta razão, Ptolomeu foi capaz de provar que, uma vez que o lado *s* do decágono descreve a corda de um arco cujo ângulo central é 36° (360°÷10) e o lado *r* do hexágono descreve a corda de um arco cujo ângulo central é 60° (360°÷6),

$$crd(36°)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r \quad .$$

Como Oliveira (2010) descreve, ele também foi capaz de, por outras aplicações de teoremas às formas inscritas no círculo, calcular os valores das cordas para os arcos de 72°, 108°, 120° e 144°, até que se tornou conveniente recorrer ao teorema que lhe possibilitou calcular os comprimentos das demais cordas, e que acabou também ganhando o seu nome: “A soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais” (Boyer, 1996, p.112).

Figura 16 - Ilustração do Teorema de Ptolomeu



Fonte: O autor, 2025.

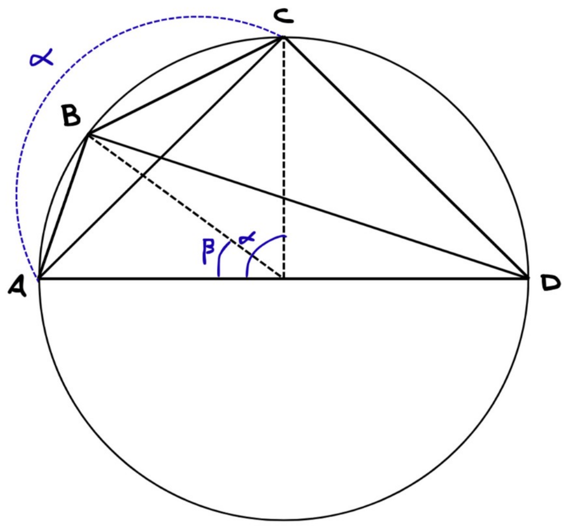
Isto é demonstrável tomando-se um ponto E na diagonal BD do quadrilátero ABCD de modo que o ângulo $B\hat{C}E$ seja igual ao ângulo $A\hat{C}D$, tal como a figura 16 ilustra. Como $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ são iguais (já que subscrevem o mesmo arco) e $B\hat{C}A = B\hat{C}E + E\hat{C}A = A\hat{C}D + E\hat{C}A = E\hat{C}D$, os triângulos ABC e CDE são semelhantes. Analogamente, como $B\hat{C}E = A\hat{C}D$ e $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$ subscrevem o mesmo arco, os triângulos BCE e ACD são semelhantes. Logo, podemos afirmar que

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{DE}\rightarrow AC\cdot DE=CD\cdot AB \quad \text{e} \quad \frac{BC}{AC}=\frac{BE}{AD}\rightarrow BC\cdot AD=BE\cdot AC \quad ,$$

o que implica que CD·AB + BC·AD = BE·AC + AC·DE = AC(BE + DE) = AC·BD, que são as diagonais do quadrilátero.

A partir deste teorema, foi possível deduzir, tomando-se um quadrilátero ABCD inscrito que possua um diâmetro do círculo como um de seus lados:

Figura 17 - Ilustração do quadrilátero cujo lado AD é o diâmetro do círculo

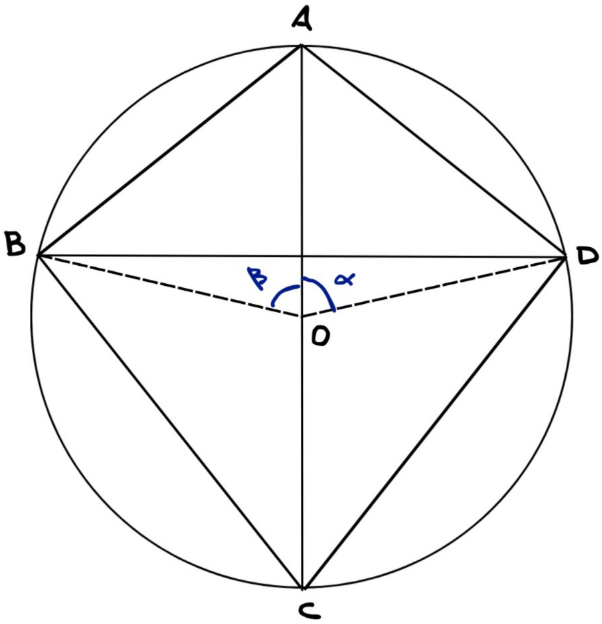


Fonte: O autor, 2025.

Como na figura 17, sendo AC = crd(α), AB = crd(β), CD = crd(180 − α), BD = crd(180 − β), BC = crd(α − β) e AD = 2r, é fácil escrever, pelo Teorema de Ptolomeu, que crd(180 − α)·crd(β) + crd(α − β)·2r = crd(α)·crd(180 − β). Assim, crd(α − β)·2r = crd(α)·crd(180 − β) − crd(180 − α)·crd(β).

Comparação semelhante pode ser feito aplicando o Teorema de Ptolomeu a outro quadrilátero ABCD que tenha uma das diagonais como o diâmetro do círculo:

Figura 18 - Ilustração do quadrilátero cuja diagonal AC é o diâmetro do círculo



Fonte: O autor, 2025.

Conforme a figura 18, sendo AC = 2r, AB = crd(β), CD = crd(180 − α), BD = crd(α + β), BC = crd(180 − β) e AD = crd(α), o teorema determina que 2r·crd(α + β) = crd(β) · crd(180 − α) + crd(α)·crd(180 − β).

Como demonstrado por Oliveira (2010), estas fórmulas permitem, ao se escrever crd(α) como 2r·sen(α/2), obter as modernas fórmulas de sen(a±b) = sen(a)·cos(b) ± sen(b)·cos(a), onde α/2 = a e β/2 = b. Por raciocínios semelhantes, segundo Boyer (1996), é possível obter também as fórmulas de cos(a±b) = cos(a)·cos(b) ∓ sen(a)·sen(b). É claro, os conceitos de seno e cosseno ainda não existiam, mas as fórmulas de Ptolomeu para as medidas das cordas lhes são, deste modo, equivalentes.

De posse dos teoremas e fórmulas que obteve e os que foram deixados por Hiparco, Ptolomeu construiu, assim, uma nova tabela de cordas:

Figura 19 - Tabela de cordas de Ptolomeu

θ	$crd\,(\theta)$ em Decimal	$crd\,(\theta)$ em Sexagesimal
0°	0	0; 0, 0
$\frac{1}{2}^\circ$	0,057	0; 31, 25
1°	1,047	1; 2, 50
$1\frac{1}{2}^\circ$	1,5708	1; 34, 15
2°	2,094	2; 5, 40
$2\frac{1}{2}^\circ$	2,618	2; 37, 4
3°	3,141	3; 8, 28
$3\frac{1}{2}^\circ$	3,664	3; 39, 52
4°	4,188	4; 11, 16
$4\frac{1}{2}^\circ$	4,711	4; 42, 40
5°	5,234	2; 5, 40
$5\frac{1}{2}^\circ$	5,7575	5; 14, 4
6°	6,280	6; 16, 49
$6\frac{1}{2}^\circ$	6,803	6; 48, 11
7°	7,326	7; 19, 33
$7\frac{1}{2}^\circ$	7,848	7; 50, 54
10°	10,459	10; 27, 32
12°	12,543	12; 32, 35
15°	15,663	15; 39, 47
20°	20,838	20; 50, 16
$22\frac{1}{2}^\circ$	23,410	23; 24, 36
25°	25,972	25; 58, 22
30°	31,058	31; 3, 30
36°	37,0804	37; 4, 55
$37\frac{1}{2}^\circ$	38,572	38; 34, 19
40°	41,0425	41; 2, 33
45°	45,922	45; 55, 19
50°	50,7141	50; 42, 51
$52\frac{1}{2}^\circ$	53,074	53; 4, 27
60°	60	60; 0, 0
$67\frac{1}{2}^\circ$	66,668	66; 40, 5
70°	68,829	68; 49, 45
72°	70,534	70; 32, 3
75°	73,051	73; 3, 5
80°	77,134	77; 8, 2
$82\frac{1}{2}^\circ$	79,121	79; 7, 17
90°	84,853	84; 51, 10

Fonte: Silva, 2022.

Conforme a figura 19, a tabela de Ptolomeu era ainda mais precisa que a de seu antecessor, tendo sido ele capaz de calculá-las até para ângulos de meio grau. Seu trabalho, *Syntaxis Mathematica*, assim, tornou-se tão célebre entre astrônomos e matemáticos que os árabes passaram a se referir a ele como *Al Magiste*, isto é, “o maior” (Boyer, 1996, p.112); este título se consolidou como um novo nome para o livro, que se tornou amplamente conhecido como *Almagesto*, reverberando sua influência por gerações.

4 IDADE MÉDIA: A TRIGONOMETRIA ENTRE OS HINDUS E OS ÁRABES

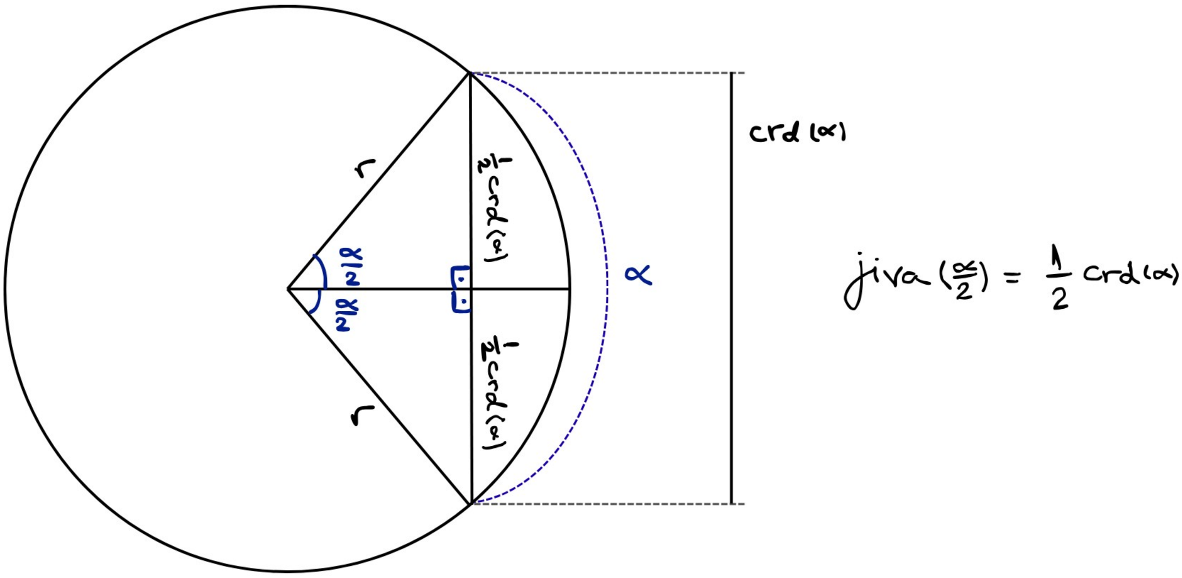
A península grega foi conquistada pelos romanos em 146 a.C., após as famosas Guerras Púnicas, sendo anexada à República de Roma, que que pouco depois daria lugar ao Império Romano. Mesmo subjugada politicamente, porém, a ciência, a cultura e a filosofia da Grécia continuaram a exercer enorme influência sobre o mundo, especialmente sobre os romanos, que as assimilaram e difundiram ainda mais. Contudo, a divisão do Império pelo imperador Teodósio (c.347-395), em 395 d.C., em Império Romano do Ocidente e Império Romano do Oriente (Império Bizantino) e a queda do Império Romano do Ocidente diante dos germânicos no ano de 476 — evento que inaugura a Idade Média —, o centro cultural e científico daquele tempo tendeu a se deslocar cada vez mais para o Oriente, encontrando amplo espaço entre os povos a leste da Grécia, sobretudo entre os hindus e, mais tarde, entre os árabes.

As civilizações da Índia e da China, tão antigas quanto as egípcias e mesopotâmias, já tinham sua própria matemática desenvolvida desde tempos muito remotos. Segundo Boyer (1996), seus conhecimentos antecedem inclusive a própria fundação de Roma, em 753 a.C. Os chineses já tinham diversas noções geométricas bem estabelecidas, tais como os ângulos ou o que viria a ser conhecido como *teorema de Pitágoras; c*om os hindus, seus vizinhos, assim, não era diferente. Além de conhecer o método egípcio de construir ângulos retos pelo estirar de uma corda, também testemunha-se em obras hindus como os *Sulvasustras* (escritas em algum momento entre os séculos VIII a.C. e II d.C.) teoremas e regras ligadas à construção de triângulos retângulos. Nos *Siddhantas,* compêndios de astronomia escritos após o século II, se observa ainda o conhecimento de uma aproximação para o valor de π muito próxima, segundo Boyer (1996), do valor utilizado por Ptolomeu. É nessa obra que se identificam avanços decisivos realizados pelos hindus na história da trigonometria, a qual passaria a desenvolver-se entre eles com especial destaque a partir dos primeiros séculos da Idade Média.

4.1 OS HINDUS: DO *JIVA* À RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Apenas uma das cinco versões correntes dos *Siddhantas* chegou até os dias de hoje completamente preservada: a *Surya Siddhanta*, escrita próximo ao início da Idade Média, por volta do ano 400, e de autoria atribuída pela tradição ao próprio Surya, deus do Sol. Fortemente influenciada pela ciência grega, mas de origem firmada nas tradições hindus, a *Surya Siddhanta*, de acordo com Costa (2003), buscou um caminho diferente do que Ptolomeu utilizava: em vez de corresponder a corda com o seu ângulo central, a *Surya* passou a relacionar a metade da corda com a metade do ângulo central correspondente; o uso desta meia corda, nomeada pelos hindus como “jiva”, permitia maior precisão nos cálculos, e abria espaço, como Costa (2003) menciona, para a aplicação de relações específicas dos triângulos retângulos, dado que se atém à descrição de um triângulo retângulo na circunferência:

Figura 20 - Representação do *jiva* hindu



Fonte: O autor, 2025.

Como ilustrado na figura 20, o *jiva* descrevia, no triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo em vista, ou aquilo que hoje se expressa pela relação r·sen(α). Com o *jiva*, pressentia-se, assim, o nascimento da primeira função trigonométrica: a função *seno*.

Em 499, foi, então, publicada a obra *Aryabhatiya*, escrita pelo matemático hindu Aryabhata (476-550), e que consistia num pequeno tratado de matemática e astronomia que, entre os hindus, veio a obter prestígio semelhante ao que *Os*

Elementos, de Euclides, desfrutava no Ocidente. Com diversos teoremas e cálculos de áreas e volumes — alguns precisos, outros nem tanto —, Aryabhata perpetuou o uso do *jiva* nos cálculos trigonométricos, contribuindo para que, em lugar da construção de tabelas de cordas ao modo dos gregos, a construção de tabelas de *jivas* passasse a ser preferida, com tabelas de *jivas* para cada ângulo sendo construídas tanto nos *Siddhantas* como no *Aryabhatiya*. Conforme Boyer (1996), as tabelas traziam 24 ângulos, iniciando com o ângulo de 3,75° e indo, de 3,75° em 3,75° até o ângulo de 90°, padronizando-se as medidas ao utilizar-se o raio como 3438’, tal como Hiparco fizera, e a circunferência como 360×60’ = 21600’. Para o ângulo de 3,75°, utilizou-se a percepção de que o ângulo é tão pequeno que a medida da meia corda se aproxima da medida do próprio arco, e assim, bastou calcular o valor do ângulo em unidades do arco: 3,75×60 = 225. Para os 23 valores seguintes, conforme o método de cálculo descrito por Boyer (1996), dividia-se o valor do *jiva* anterior por 225, subtraía-se do valor do *jiva* anterior e somava-se 225 para obter-se o *jiva* do novo ângulo; para usar a linguagem algébrica, conhecendo-se o *jiva* J_n de um ângulo, com $1 \leq n \leq 24$, dizemos que calculava-se $J_{n+1} = J_n - (J_n/J_1) + J_1$, onde $J_1 = 225$. O *jiva de* 7,5°, por exemplo, seria 225 - 1 + 225 = 449. Assim, Aryabhata calculou e tabelou os valores até o penúltimo *jiva*, que era o de 86,25°, e atribuiu, por fim, ao *jiva* do último ângulo, de 90°, o valor preciso de 3438. Eis, com base nas informações dadas por Rodrigues (2020), parte dos valores calculados por ele:

Tabela 4 - O *jiva* calculado por Aryabhata para cada ângulo

Ângulo	3,75°	7,5°	11,25°	15°	...	78,75°	82,5°	86,25°	90°
Jiva	225	449	671	890		3372	3409	3431	3438

Fonte: o autor, 2025

É possível notar, nos resultados de Aryabhata listados na tabela 4, certo erro de medição aparecendo a cada novo valor; se dividirmos, todavia, cada um destes por r = 3438 para obtê-los na notação moderna, torna-se notável a proximidade entre cada um deles com o verdadeiro valor do seno de cada ângulo, conforme pode-se observar a seguir, com a exatidão dos resultados indo até, pelo menos, a terceira casa decimal, precisão impressionante para a época:

Tabela 5 - Comparação de cada *jiva* obtido para os ângulos e seus senos

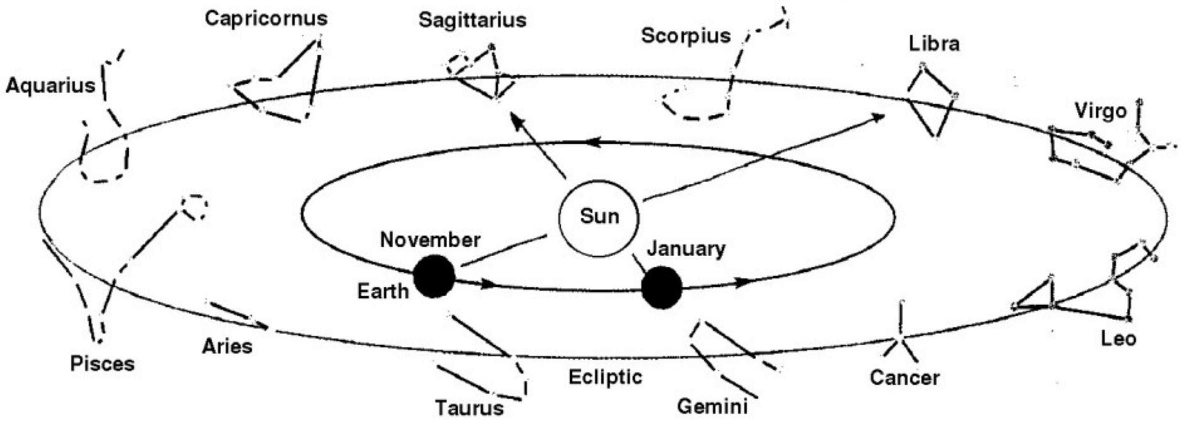
Ângulo	**Jiva**	**Jiva/r**	**Seno**	**Valor do erro**
3,75°	225	0,065445026	0,065403129	0,000041897
7,5°	449	0,130599186	0,130526192	0,000072994
11,25°	671	0,195171611	0,195090322	0,000081289
15°	890	0,258871437	0,258819045	0,000052392
		...		
78,75°	3372	0,980802792	0,98078528	0,000017512
82,5°	3409	0,991564863	0,991444861	0,000120002
86,25°	3431	0,997963933	0,997858923	0,00010501
90°	3438	1	1	0

Fonte: O autor, 2025.

A tabela 5 lista, nas colunas em fonte preta, os resultados de Aryabhata e, nas colunas em fonte vermelha, os valores dos senos (*jiva*/r) que calculamos a partir dos *jivas* encontrados por ele, os verdadeiros valores dos senos e as diferenças entre eles, mostrando como o erro de seus resultados era ínfimo.

Após o surgimento do *jiva,* precursor do seno, não tardou para que os hindus também começassem a trabalhar, tal como exposto por Boyer (1996), com as relações que hoje se descrevem como r·cos(α) — chamada pelos hindus de *kotijiva*, que corresponde à meia-corda do ângulo complementar ao ângulo α em vista — e r·vers(α), que é o mesmo que r·(1-cos(α)); estes, especialmente o *kotijiva*, permitiram importantes avanços no estudo da trigonometria, tal como se pode observar pelos trabalhos realizados pelo matemático hindu Varahamihira (505-587) em seus estudos das constelações do zodíaco.

Figura 21 - As doze constelações do zodíaco



Fonte: Otero, 2022.

Desde o século VIII a.C., astrônomos babilônios notavam que os sete principais astros visíveis a olho nu — o Sol, a Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno — se movem dentro de uma faixa estreita do céu; as constelações presentes nessa faixa, conforme a figura 21, eram designadas coletivamente como “zodíaco”. Nela, observava-se também que o Sol, movendo-se em trajetória circular, levava pouco mais de doze meses lunares para completar uma volta inteira ao redor do céu. Desse modo, ocorrendo o ano-novo no equinócio da primavera, no primeiro mês o Sol passava, conforme Otero (2022), pela primeira constelação do zodíaco, Áries; no segundo mês, passava por Touro; no terceiro, Gêmeos; e assim sucessivamente, até completar, ao final do inverno seguinte, sua jornada ao passar por Peixes e retornar ao ponto de partida. Esse sistema foi adotado por astrônomos gregos, que, por sua vez, o transmitiram aos hindus, chegando ao conhecimento de Varahamihira.

Assim, ao projetar o círculo de 360° sobre a trajetória aparente do Sol — a eclíptica —, as posições das constelações passaram a corresponder a ângulos determinados: divididos os 360° em doze partes iguais, Áries passou a marcar o ângulo de 30°, ou um signo zodiacal, Touro o de 60°, ou dois signos zodiacais, e assim sucessivamente.

Foi nesse contexto que Varahamihira, em sua obra *Pancasiddhantika*, fez observações como as que são descritas a seguir:

> O quadrado do raio é chamado de dhruva.
> Uma quarta parte deste é [o quadrado do *jiva*] de Áries…
> O quadrado do dhruva é diminuído pelo [quadrado do *jiva*] de Áries;

> a raiz quadrada é o *jiva* de dois signos zodiacais (Otero, 2022, p.3; tradução do autor).

Onde Áries representa o ângulo de 30°, Varahamihira afirmava a possibilidade de calcular o seu *jiva* considerando-se um quarto do *dhruva*, isto é, do quadrado do raio do círculo, de modo que o quadrado do *jiva d*e Áries seria igual a este. Em outras palavras,

$$jiva^2(30°)=\sqrt{\frac{r^2}{4}}$$

$$\rightarrow jiva^2(30°)=r\frac{1}{2} \quad .$$

Afirmando, ainda, que a raiz quadrada da diferença entre o quadrado do *jiva* de Áries e o quadrado do *dhruva* vale o mesmo que o *jiva* de dois senos zodiacais, isto é, de 2×30°=60° (que Varahamihira, em outro lugar de seus textos, denomina por Touro), ele encontra também a relação

$$jiva(60°)=\sqrt{r^2-(jiva^2(30°))^2}$$

$$\rightarrow jiva(60°)=\sqrt{r^2-r^2(\frac{1}{2})^2}$$

$$\rightarrow jiva(60°)=r\sqrt{1-\frac{1}{4}}=r\sqrt{\frac{3}{2}} \quad .$$

Ora, uma vez que *jiva* equivale ao que denominamos r·sen(α), estas relações implicam, respectivamente, que

$$sen(30°)=\frac{1}{2}$$

e

$$sen(60°)=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad .$$

A mais notável de todas as observações, todavia, é a que Varahamihira descreve mais adiante:

> Quando os [*jivas*] restantes são desejados, o raio é diminuído pelo *jiva* do resultado da subtração do dobro do arco de um quadrante; o quadrado da metade desse [resultado] deve ser adicionado ao quadrado da metade [do *jiva*] do dobro [do arco].
> A raiz quadrada disso é o *jiva* desejado.

> O dhruva diminuído por esse [quadrado é o quadrado] do resto [da] soma (Otero, 2022, p.6; tradução do autor).

Sendo “um quadrante” o arco de 90°, o que se obtém da instrução de Varahamihira é que, para obter-se o *jiva* de um ângulo α, deve-se calcular

$$jiva(\alpha)=\sqrt{\left(\frac{r-jiva(90°-2\alpha)}{2}\right)^2+\left(\frac{jiva(2\alpha)}{2}\right)^2} \quad ,$$

e que, ao encontrar-se a diferença entre o *dhruva* e o quadrado do *jiva,* o que se consegue é o quadrado do “resto da soma”, modo de se referir ao *jiva* do ângulo complementar, isto é, *kotijiva*. Logo, temos

$$r^2-jiva^2(\alpha)=kotijiva^2(\alpha) \quad .$$

Ora, dividindo-se ambos os lados da igualdade por r², o que se tem é equivalente a dizer que 1 – sen²(α) = cos²(α), ou, como Costa (2003) observa, que

$$sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \quad ,$$

a relação fundamental da trigonometria!

Os avanços conquistados pelos hindus foram tais que não puderam ficar reservados aos limites da Índia por muito tempo; a transmissão de eus desenvolvimentos logo começou a ocorrer para as outras nações, e isto, especialmente, por meio dos árabes.

4.2 O AVANÇO DA TRIGONOMETRIA NO DOMÍNIO ÁRABE

Nos séculos VI-VII, a aparição da figura de Maomé (c.571-632) na Arábia revolucionou para sempre a história do mundo oriental: a religião que nasceu das suas pregações, o Islã, unificou os povos da Arábia em um mesmo regime político, a partir do qual, movidos pela ideia da *guerra santa*, se entregaram, conforme Figueira (2013), à tarefa de expandir o islamismo em todas as direções. Conquistaram a Síria em 636, o Iraque em 637, o Egito em 642 e o Irã em 651, alcançando a Índia logo depois. Estendendo-se pelo norte da África a partir do Egito, cruzaram o estreito de Gibraltar em 711 e conquistaram a península Ibérica, sendo detidos somente em 732 pelos francos. A cultura, a religião e a língua árabe se estabeleceram, assim, predominantes sobre o Oriente Médio, bem como sobre as regiões vizinhas da Ásia e sobre a África Setentrional.

O intenso contato com outros povos e culturas, decorrente do processo de expansão, rendeu aos árabes, conforme Boyer (1996), desde a segunda metade do século VIII, extraordinário desenvolvimento nas artes e na ciência. Diversas obras foram traduzidas para o idioma árabe, que então suplantava o idioma grego no Oriente, processo pelo qual chegaram às mãos dos intelectuais muçulmanos textos como o *Almagesto* de Ptolomeu e os *Siddhantas* hindus. As traduções dessas duas grandes obras deram origem, segundo Boyer (1996), a duas formas distintas de trigonometria entre os árabes: uma baseada na geometria grega das cordas, e outra nas tabelas de *jivas* hindus; o termo *jiva* foi, inclusive, traduzido para o árabe como *jiba*, abreviadamente *jb.*

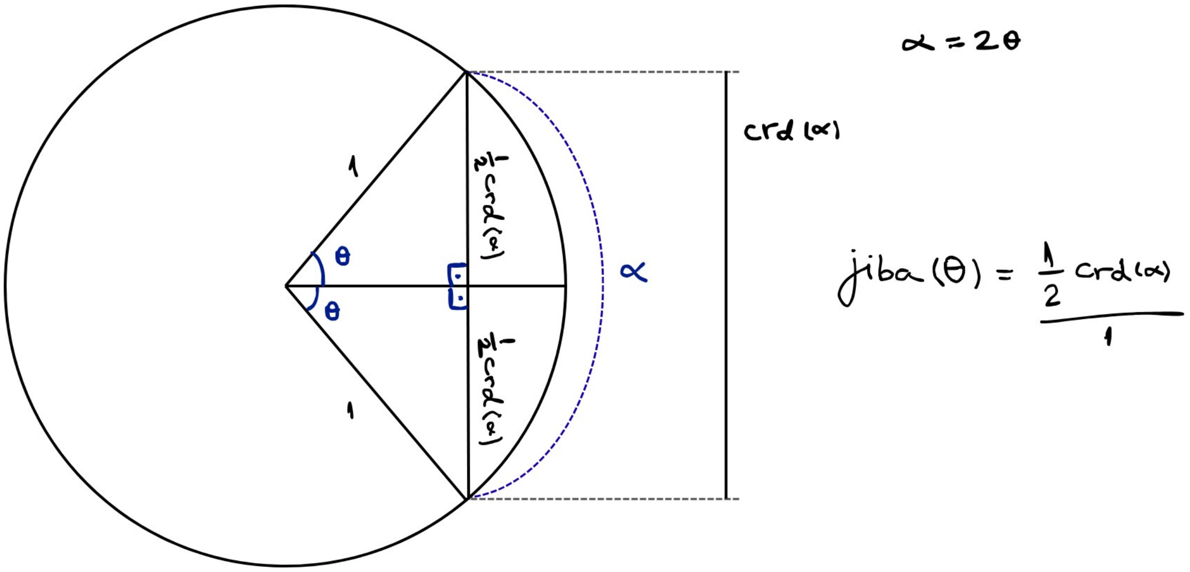
Na cidade de Bagdá fundou-se também, sob o califado de Al-Mamum (809-833), uma Casa da Sabedoria, verdadeira escola, de onde emergiriam grandes nomes da matemática e da astronomia, a exemplo dos de al-Khowarizmi (c.750-c.850), matemático cujo nome deu origem aos termos *algarismo* e *algoritmo*, e al-Battani (858-929) ou Albategnius, como é chamado nas versões latinas, e que é conhecido, segundo Costa (2003), como o “Ptolomeu de Bagdá”. Em sua obra *Sobre o movimento das estrelas*, Al-Battani foi capaz de expressar, a partir do triângulo retângulo formado no gnômon, entre outras relações, a fórmula

$$b = \frac{a \cdot jiba(90° - \hat{A})}{jiba\ \hat{A}} \quad ,$$

onde *a* e *b* determinam os catetos do triângulo e Â é o ângulo oposto ao cateto *a*; um século depois, Abu’l-Wefa (940-988) expressaria esta fórmula como $a = b \cdot \tan(\hat{A})$, descrevendo explicitamente a função *tangente*.

Al-Battani também foi, de acordo com Costa (2003), o responsável por introduzir a ideia de círculo unitário, de extrema importância para a trigonometria moderna. Tomando-se o raio como 1, o valor da razão entre a meia corda do arco θ e o raio do círculo, isto é, entre o cateto oposto ao ângulo θ do triângulo retângulo e sua hipotenusa, tornava-se igual ao valor do *jiba*:

Figura 22 - O *jiba* no círculo unitário



Fonte O autor, 2025

Ora, por semelhança de triângulos, uma vez que qualquer triângulo retângulo com o mesmo ângulo agudo θ será semelhante a este primeiro triângulo, conclui-se que a razão entre cateto oposto e hipotenusa será sempre a mesma, não importando as suas medidas. Sob Al-Battani, então, como Costa (2003) expõe, o termo *jiba* passa a ser utilizado para se referir a esta razão, tal como ilustrado na figura 22, com o matemático árabe utilizando a sua demonstração para construir uma tabela de *jibas* de 0,25° em 0,25° até 90°. No século XII, Robert de Chester, ao traduzir obras árabes para o latim, confundiu a palavra *jiba*, que era escrita em árabe sem as vogais ("*jb*"), com a palavra árabe "jaib", que significa "baía" ou "enseada" (Boyer, 1996, p.172), e acabou traduzindo-a como "sinus", de mesmo significado em latim. Desta, se originou a palavra "seno" em português.

Com as contribuições de Al-Battani, Abu'l-Wefa e Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274), entre outros importantes nomes árabes da matemática, a trigonometria continuou a crescer e a adquirir novos contornos. Conforme Boyer (1996), este último, Nasir Eddin, com o seu *Tratado sobre quadriláteros*, foi, inclusive, o autor do "primeiro trabalho no qual a trigonometria apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da astronomia" (Costa, 2003, p.65). Também foram, de acordo com Pereira (2010), os árabes os responsáveis pela introdução das seis funções trigonométricas básicas, hoje denominadas como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, com estas últimas sendo devidas a Abu'l-Wefa.

Outras identidades importantes também são atribuídas aos árabes; a lei dos senos, por exemplo, é atribuída a Nasir Eddin, conforme a exposição de Pereira (2010).

Com o intenso fluxo de transmissão de conhecimento entre o mundo islâmico e a Europa, a trigonometria árabe logo passou a exercer influência decisiva sobre a trigonometria europeia, com astrônomos árabes como Ibn al-Zarqâla, ou Arzachel (séc. XI), e Jeber ibn Aphla (séc. XII) contribuindo pessoalmente para essa difusão, vivendo ambos na Península Ibérica. Notável exemplo da influência árabe é a obra *Practica Geometriae*, de Fibonacci (1170-1250), que se constitui em nada mais do que "uma aplicação da trigonometria árabe na Agrimensura" (Costa, 2003, p.66). Assim, com o declínio da Escola de Bagdá e a intensificação das traduções das obras e tabelas árabes para as línguas europeias, o desenvolvimento da trigonometria deslocou-se outra vez para a Europa. Agora, graças aos importantes progressos alcançados pelos povos do Oriente, ela retornava com uma riqueza inigualável.

5 DO RENASCIMENTO À TRIGONOMETRIA MODERNA

A Idade Média encontrou seu fim em 1453, com a tomada de Constantinopla pelos otomanos, marcando a queda do Império Bizantino. Neste período, com o enfraquecimento da economia feudal, predominante na Europa medieval, e do poder da Igreja Católica, numa conjunção de movimentos que culminaram na Reforma Protestante, irrompeu no continente europeu um intenso movimento cultural de caráter mais humanista, laico e antropocêntrico, que buscava se distanciar de muitos dos elementos que haviam marcado a cultura medieval. Tal movimento, iniciado, segundo Cáceres (1996), na Itália, era chamado de Renascimento, ou Renascentismo, que permeou os séculos XIV a XVI.

No contexto deste movimento, o racionalismo e o método experimental ganharam papel central na busca pelo desenvolvimento científico; foi neste período, por exemplo que Nicolau Copérnico (1473-1543) procurou demonstrar a teoria heliocêntrica, segundo a qual é a Terra que gira em torno do Sol, e não o contrário, tal como se cria na Idade Média; Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) viriam, logo depois, a confirmá-la. Assim, com o crescente interesse pelo avanço das ciências, a matemática também recebeu seu impulso e, com ela, a trigonometria. No contexto renascentista de resgate da tradição grega, por exemplo, Georg Peuerbach (1423-1469) retomou os trabalhos de Ptolomeu e elaborou uma nova tabela de senos, que se tornou amplamente difundida entre os europeus.

Ao longo de toda a sua história, porém, a trigonometria esteve estreitamente atrelada à ciência astronômica; o trabalho de Nasir Eddin, no século XIII, era uma notável exceção. Segundo Boyer (1996), a obra de Peuerbach não era diferente, permanecendo nela a vinculação com a astronomia. Seria seu discípulo, Regiomontanus, todavia, o responsável pelo impulso decisivo no processo de consolidação da trigonometria como uma ciência analítica independente.

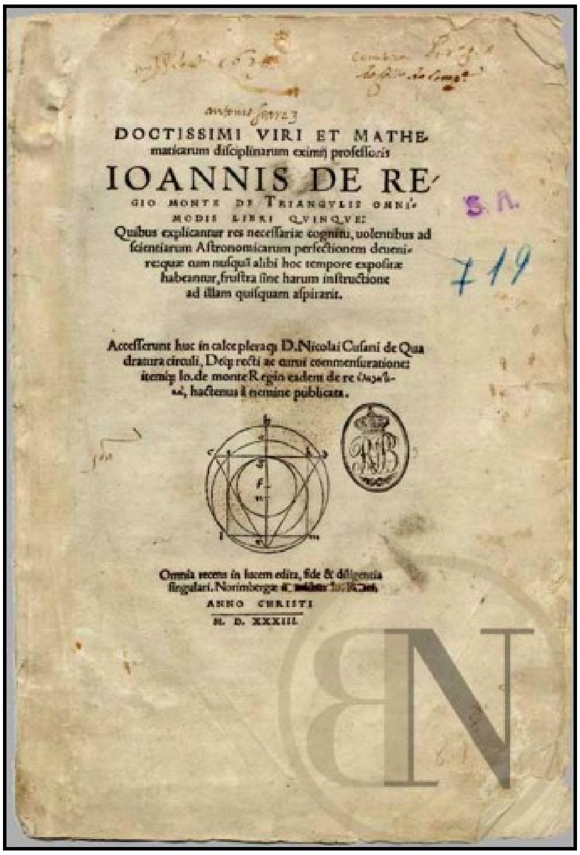
5.1 REGIOMONTANUS E A DESVINCULAÇÃO DA TRIGONOMETRIA DA ASTRONOMIA

Johann Müller von Könisberg (1436-1476), conhecido, graças à versão latina do seu lugar natal, Regiomontanus, que significa “montanha de rei”, foi provavelmente, segundo Boyer (1996), o mais influente matemático do século XV. Regiomontanus teve a oportunidade de estudar nas universidades de Leipzig e de Viena, onde despertou interesse pela astronomia e pela matemática. Mais adiante, em Nüremberg, ele viria a estabelecer uma pequena gráfica e um observatório na intenção de imprimir traduções de diversas obras importantes e investir em suas investigações.

Em Viena, Regiomontanus foi aluno de Peuerbach, humanista interessado em astronomia, e com quem pôde cooperar em excelentes trabalhos, tais como a *Theoricae novae planetarum*, de Peuerbach, que foi publicada por Regiomontanus em 1472, e uma nova versão latina do *Almagesto* de Ptolomeu, que foi iniciada por Peuerbach e completada por ele. Como Pereira (2010) expõe, a familiaridade de Regiomontanus com o trabalho de cópias e traduções levou-o a elaborar uma espécie de atualização do *Almagesto*, a sua *Epítome do Almagesto de Ptolomeu*, esclarecendo, comentando e preenchendo saltos presentes na obra original; ele seria crucial para investigações astronômicas futuras, tendo sido utilizado, inclusive, por Copérnico e por Galileu.

A mais importante de suas obras, porém, foi a *De triangulis omnimodis,* uma exposição de regras sobre triângulos que “marcou o renascimento da trigonometria” (Boyer, 1996, p.187).

Figura 23 - Capa da obra *De Triangulis Omnimodis* (1533)


DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:
Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad
scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-
re: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ
habeantur, frustra sine harum instructione
ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Qua
dratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione:
itemq; Io. de monte Regio eadem de re [illegible]
[illegible], hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia
singulari. Norimbergæ [illegible]
ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

Fonte: Pereira (2010)

Escrito por volta de 1464, com publicação póstuma datada de 1533, a obra consiste em uma coleção de cinco livros, sendo os dois primeiros dedicados à geometria plana e os três últimos abordando a geometria esférica, com o último deles tendo permanecido inacabado; toda ela segue um estilo fortemente euclidiano, apresentando definições e axiomas no início e demonstrando os teoremas a partir daí. Como Pereira (2010) expõe, a obra foi escrita com o objetivo de preparar os leitores da *Epítome:*

> Regiomontanus, na apresentação de sua obra, mostra que os leitores devem ler primeiro sua obra, *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, para depois estudar a *Epítome do Almagesto*, pois "ninguém pode evitar a ciência de triângulos" (Hughes, 1967, p. 5), já que, segundo ele, para um estudo mais aprofundado de Astronomia, o estudante precisava de conceitos sólidos da teoria dos triângulos (Pereira, 2010, p.62).

Tabela 6 - Conteúdo da obra *De Triangulis Omnimodis*

Livros	Conteúdo	Teoremas
Livro I	Cálculos básicos sobre quantidades	Do T1 ao T19
	Definição de *seno*	T20
	Teoria dos Triângulos (retângulo, isósceles etc.)	Do T21 ao T57
Livro II	Lei dos senos	T1
	Área do triângulo	T26
	Uso da álgebra	T12, T23
	Teoria dos Triângulos, utilizando a lei dos senos e diversas soluções conhecidas	Do T2 ao T33
Livro III	Geometria de grandes círculos em esferas	Do T1 ao T34
	Triângulos esféricos	Do T35 ao T56
Livro IV	Teoremas fundamentais para triângulos esféricos	Do T1 ao T15
	Lei dos senos para triângulos esféricos	T16, T17, T26
	Teorema de Geber	T18
	Teoria dos triângulos esféricos	Do T19 ao T34
Livro V	Lei dos cossenos	T2
	Problemas envolvendo triângulos esféricos	Do T3 ao T15

Fonte: Pereira, 2010.

A tabela 6 apresenta a estrutura dos conteúdos da obra.

Segundo Boyer (1996), o uso de fórmulas de área, que Regiomontanus procurou incluir em seu trabalho, era uma novidade. Nessa obra, ele ainda não havia feito uso da função tangente, mas procurou tratar também desta função em outro trabalho seu, a *Tabulae directionum*, de publicação também póstuma, datada de 1490, e na qual descreve uma tabela de tangentes. A trigonometria do matemático de Königsberg logo viria a influenciar fortemente a trigonometria de Nicolau Copérnico, que deu continuidade a alguns de seus desenvolvimentos e que, com publicações que se inspiravam fortemente nela — tais como suas *Narratio prima* (1540), escrita em conjunto com seu aluno, George Joachim Rhaeticus (1514-1576), que foi provavelmente quem lhe apresentou as obras de Regiomontanus, e *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) —, ajudou a ampliar a influência de Regiomontanus.

Os trabalhos de Regiomontanus foram cruciais para o desenvolvimento da trigonometria ao lidarem com ela por si mesma, construindo-a a partir dos axiomas e teoremas geométricos e separando-a da astronomia, na qual a trigonometria costumava figurar como mero acessório. Anos mais tarde, Rhaeticus, a partir da conjunção das ideias de Copérnico e das de Regiomontanus, seria responsável pela publicação do *Opus palatinum de triangulis,* que foi “o tratado mais elaborado de trigonometria escrito até então” (Boyer, 1996, p.200). Assim, a trigonometria organizava-se em definitivo, graças ao passo dado por Regiomontanus, como uma disciplina independente.

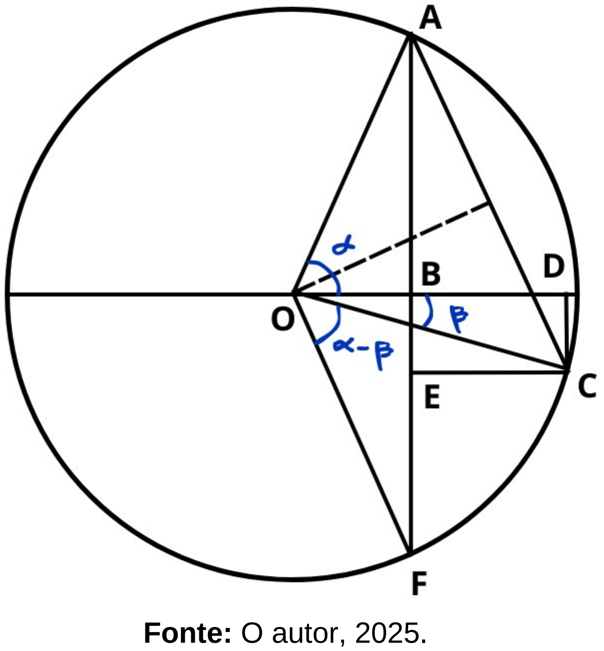
5.2 DESENVOLVIMENTOS DA TRIGONOMETRIA DE RHAETICUS ATÉ EULER

O trabalho de Rhaeticus, em *Opus palatinum de triangulis*, foi marco decisivo na história de maturação da trigonometria, sendo nele que “a trigonometria atingiu a maioridade” (Boyer, 1996, p.200). Em sua abordagem, Rhaeticus deixou de lado o costume de lidar com arcos de círculos, preferindo focar no uso dos triângulos retângulos, e utilizou e tabelou resultados de todas as seis principais funções trigonométricas, definindo-as não mais como funções do arco, mas como funções do ângulo, ilustrando-as “em termos de razões definidas no triângulo retângulo sem fazer menção a um círculo dado” (Oliveira, 2010, p.54). Ele adquiriu, de acordo com Costa (2003), precisão de até onze casas decimais em seus cálculos, fez uso de semiquadrantes em suas tabelas e também introduziu o conceito de secantes. Embora não tenha vivido o bastante para completar o seu tratado, ele foi finalizado e editado por seu discípulo Valentin Otho (c.1550-1605), que o publicou em 1596.

François Viéte (1540-1603) foi uma figura central do período de transição entre o Renascentismo e o período moderno na matemática. Embora não fosse matemático de profissão, tendo estudado direito em sua juventude e servido como membro do parlamento da Bretanha e, mais tarde, do conselho dos reis Henrique III (1571-1579) e Henrique IV (1553-1610) da França, Viéte se dedicava extensivamente à matemática em seus períodos de lazer; sua dedicação lhe rendeu importantes contribuições, tais como o apelo pelo uso das frações decimais em lugar das sexagesimais, a distinção entre parâmetros e incógnitas e um método para resolução de equações cúbicas. Na trigonometria, tendo as obras de Regiomontanus e Rhaeticus como base, Viéte também a tratava como "um ramo independente da matemática" (Boyer, 1996, p.211), e tornou-se o pioneiro em trazer uma abordagem analítica generalizada. Além da construção de tabelas trigonométricas e do uso de todas as seis funções principais, Viéte também trouxe contribuições em sua estratégia de decompor triângulos oblíquos em triângulos retângulos e na demonstração de algumas identidades trigonométricas, que surgiam em profusão no seu tempo. Segundo a descrição de Boyer (1996), Viéte foi capaz de demonstrar, por exemplo, a identidade

$$sen(x)+sen(y)=2\,sen\frac{(x+y)}{2}\cos\frac{(x-y)}{2} \quad .$$

Figura 24 - Diagrama base para a demonstração de Viéte



Fonte: O autor, 2025.

Conforme a figura 24, sendo sen(α) = AB e sen(β) = CD, sen(α) + sen(β) = AB = CD = AE =

$$AC\cdot cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} \quad = \quad 2\,sen\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} \quad .$$

Chamando $(\alpha+\beta)/2$ de *a* e $(\alpha-\beta)/2$ de *b*, ainda, temos $\alpha = a+b$ e $\beta = a-b$ e, consequentemente, $sen(a+b) + sen(a-b) = 2sen(a)cos(b)$. Raciocínios semelhantes também permitem obter $sen(a+b) - sen(a-b) = 2cos(a)sen(b)$, $cos(a+b) + cos(a-b) = 2cos(a)cos(b)$ e $cos(a-b) - cos(a+b) = 2sen(a)sen(b)$. Identidades deste tipo estavam em alta no tempo de Viéte, sendo denominadas *regras de prostafére*, isto é, “fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença” (Boyer, 1996, p.211). Viéte também demonstrou a fórmula

$$\frac{tg(\alpha+\beta)}{tg(\alpha-\beta)}=\frac{a+b}{a-b} \quad ,$$

onde α *e* β são ângulos quaisquer e *a e b* seus respectivos arcos; de acordo com Boyer (1996), ela é equivalente à moderna lei das tangentes,

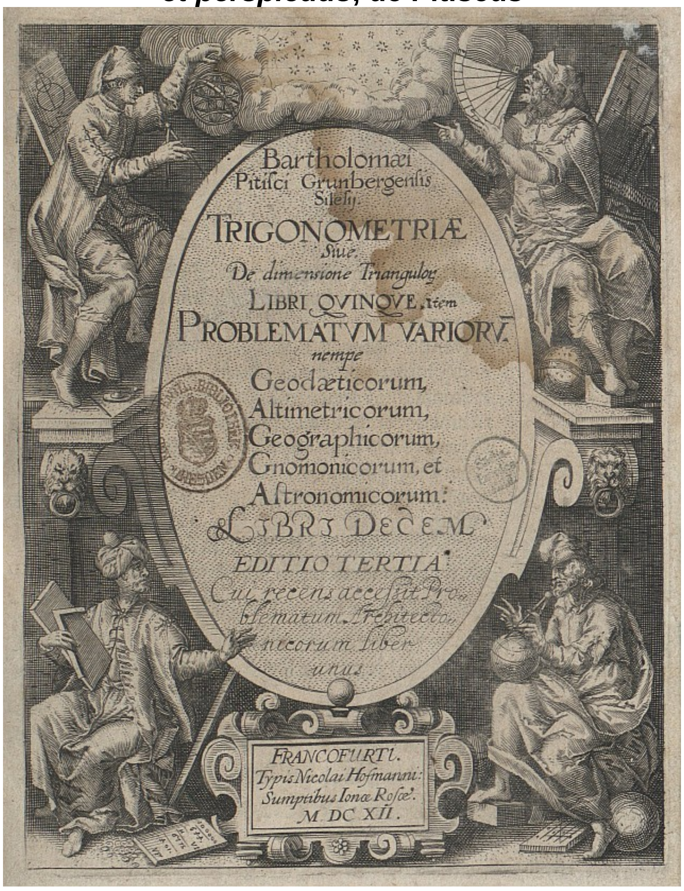
$$\frac{tg\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{tg\frac{(\alpha+\beta)}{2}}=\frac{A-B}{A+B} \quad ,$$

em que A e B são lados de um triângulo e α *e* β são os seus respectivos ângulos opostos. No campo da álgebra, teve também a percepção genial de que era possível usar a trigonometria para resolver uma equação da forma $x^3 + 3pqx + q = 0$, fazendo $mx = y$ e escrevendo-a como $y^3 + 3m^2py + m^3q = 0$, pois esta nova forma é análoga à fórmula $cos^3(\theta) - \frac{3}{4}cos(\theta) - \frac{1}{4}cos(3\theta) = 0$ e, nesta situação, como $y = cos(\theta)$, $3m^2p = -\frac{3}{4}$, $m^3q = \frac{1}{4}cos(3\theta)$ e sendo os valores de p e q já dados, torna-se possível encontrar o valor de m, depois o de $cos(3\theta)$, depois o de $cos(\theta)$, depois o de y e, por fim, o de x. Assim, ao aplicá-la dentro da álgebra, Viéte foi, ainda, capaz de ampliar o alcance da trigonometria na matemática.

Foi nesse mesmo período que a trigonometria foi referida por este nome pela primeira vez. O primeiro a utilizar o termo foi Bartholomeu Pitiscus (1561-1613), em uma publicação de 1595, na qual ele corrigia as tabelas de Rhaeticus e modernizava “o tratamento do assunto” (Costa, 2003, p.67). Outras importantes nomenclaturas, de acordo com Oliveira (2010), também apareceram por este tempo: com o termo *sinus* sendo utilizado desde as traduções do árabe, Edmund Gunter (1581-1626) designou o seno do ângulo complementar pela primeira vez como *co.sinus*, o que John Newton (1622-1678) modificou para *cosinus*; daí vem o termo “cosseno”. As palavras “tangente” e “secante” — deixando-se de lado, aqui, as questões idiomáticas —, por sua vez, foram aplicadas pela primeira vez por Thomas Fincke (1561-1656), com a notação *sec* para secante aparecendo primeiro com

Albert Girard (1595-1632). O termo “cotangente”, então, foi aplicado pela primeira vez por Gunter em 1620, e também foi ele o primeiro a usar a notação abreviada *sen* para o seno. A abreviação *cos* para o cosseno, por fim, veio de Jonas Moore (1617-1679) em 1674.

Figura 25 - Capa da obra *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*, de Pitiscus



Fonte: Macho, 2013.

Outras importantes contribuições para a trigonometria vieram de: John Napier (1550-1617), matemático que, como Viéte, não o era de profissão, mas que, em seu interesse pessoal, envolveu-se profundamente com ela, e estabeleceu importantes regras ligadas à trigonometria esférica; William Oughtred (1574-1660), que “preocupou-se em desenvolvê-la do ponto de vista simbólico” (Costa, 2003, p.67); Henry Gellibrand (1597-1637) e John Newton (1622-1678), que “anteciparam a tendência atual de introduzir divisões centesimais do ângulo nas tabelas trigonométricas” (Costa, 2003, p.67); John Wallis (1616-1793), que deu sua parcela de contribuição ao “expressar fórmulas em vez de proporções” e ao “trabalhar com séries finitas” (Costa, 2003, p.67); Thomas Fanten (1660-1734), “o primeiro matemático a evidenciar a periodicidade das funções trigonométricas" (Costa, 2003, p.67) e o célebre Isaac Newton (1642-1727), que, trabalhando com séries infinitas, lidou com a função arco seno, de notação *arcsen*(x), e a estendeu em série, inferindo também, por reversão, a série correspondente para sen(x); entre muitos outros matemáticos. De Isaac Newton, sabe-se ainda que partilhou com Whilhelm Leibniz (1646-1716) a fórmula geral para sen(nx) e cos(nx). De acordo com Costa (2003), ele abriu, com isso, novas perspectivas para que sen(x) e cos(x) deixassem de ser compreendidas como grandezas geométricas e passassem a ser tratadas como números. A forma atual da trigonometria, por fim, seria estabelecida com Leonhard Euler (1707-1783), o maior matemático da Suíça e, certamente, um dos maiores da história da humanidade.

Euler foi responsável por inúmeras contribuições em álgebra, geometria e análise matemática, tendo estabelecido importantes resultados em diversos assuntos: séries infinitas, números primos, teoria dos logaritmos, equações diferenciais, cálculo de probabilidade, poliedros convexos, etc. Também foi o autor de diversas notações utilizadas hoje: a letra *e* para a base dos logaritmos naturais (e ≈ 2,71828…), a letra *i* para a unidade imaginária (i = √-1), a letra grega Σ para designar soma, a notação f(x) para uma função de x, o padrão de letras minúsculas (a, b, c) para representar lados do triângulo e letras maiúsculas (A, B, C) para designar seus vértices, entre diversas outras. Também foi responsável pela popularização do uso da letra grega π para a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo (π ≈ 3,14159…); antes dele, segundo Boyer (1996), apenas William Jones (1675-1749) a teria utilizado, em 1706. Da sua lista de contribuições, assim, a trigonometria também não ficou de fora.

Como relata Boyer (1996), o seno era bem entendido no tempo de Euler como um número ou uma razão, e não mais como um segmento de reta. Assim, em sua obra mais famosa, *Introductio in analysin infinitorum,* Euler define o seno como o número dado pela série

$$sen(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\dots \quad ,$$

para um valor de x. Também obtinha-se as identidades

$$sen(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

e

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

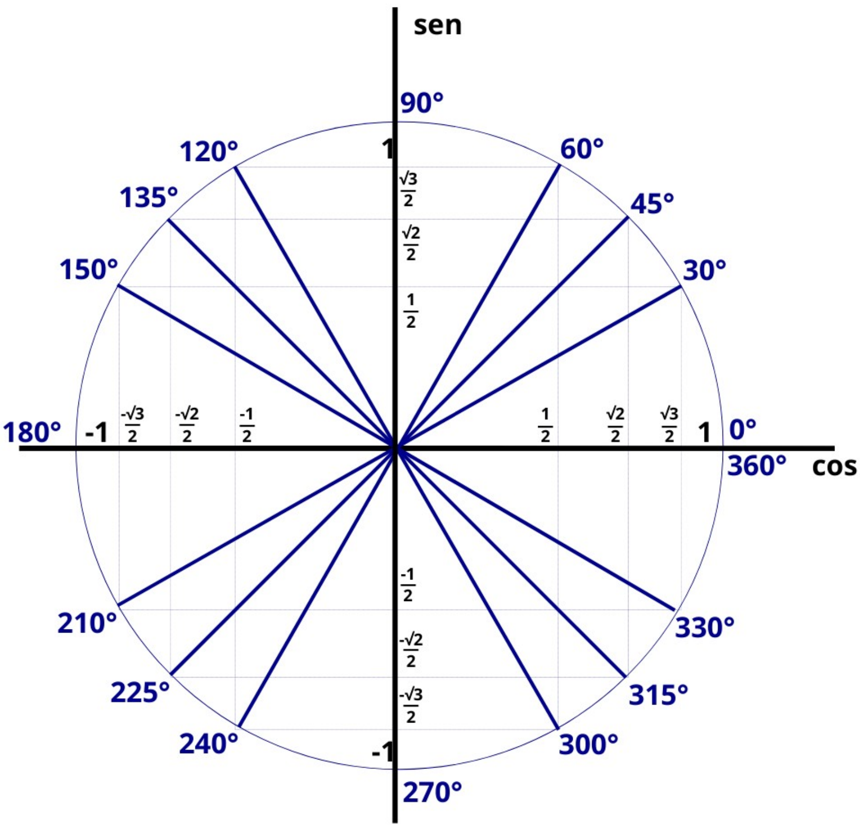
para sen(x) e cos(x), bem como a relação e^{ix} = cos(x)

$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x) \quad .$$

Estas relações ficaram conhecidas como “identidades de Euler” (Boyer, 1996, p.306).

As definições de Euler também colaboraram fortemente para a popularização do círculo trigonométrico, que ilustra o modo com que as funções trigonométricas de cada ângulo se articulam.

Figura 26 - Círculo trigonométrico com ângulos notáveis



Fonte: O autor, 2025.

O círculo trigonométrico exemplificado na figura 26 relaciona as funções de seno e cosseno, diagramando os valores de cada ângulo notável para ambas as funções. Conforme a descrição de Costa (2003), assim, a adoção do círculo unitário e a definição das funções trigonométricas aplicadas a números, em vez de ângulos, foi que deram à trigonometria a sua forma atual.

Novas contribuições ainda continuaram a ocorrer após os dias de Euler, tais como os desenvolvimentos trigonométricos dentro do cálculo integral. Hoje, graças às ferramentas da matemática moderna e aos recursos tecnológicos disponíveis, pode-se ainda estabelecer com precisão muito maior os resultados que os antigos buscavam com grande esforço, tais como as tabelas trigonométricas que tantos se empenharam em desenvolver. Do mesmo modo, numerosas identidades trigonométricas também se tornaram bem estabelecidas e demonstradas. No entanto, todas essas contribuições representam um avanço pequeno no que se refere à consolidação da disciplina: em essência, a Trigonometria moderna se encontrava plenamente formada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história percorrida pela trigonometria revela-se, assim, profunda, tanto por estender-se ao longo de milênios quanto por envolver-se com diversas ciências e culturas de distintos povos, assumindo múltiplas formas de sistematização ao longo do tempo. Suas diferentes fases e os contextos em que cada resultado surgiu e se desenvolveu fornecem ao investigador esclarecimentos valiosos acerca do processo de construção da disciplina. Tal conhecimento mostra-se de incalculável valor, especialmente para o professor contemporâneo, que pode encontrar na história da trigonometria inspiração e apoio para diversas formas de abordagem e apresentação de seus conteúdos.

No contexto da etnomatemática, por exemplo, os conceitos trigonométricos se revelam fortemente vinculados em suas origens com as culturas em que se desenvolveram, mostrando-se ligados a diversos elementos culturais como os expostos aqui: relógios de sol, pirâmides, métodos de contagem e de medição com cordas, entre outros. Essas conexões oferecem excelentes exemplos de como a matemática, em particular a trigonometria, se relaciona com a realidade, servindo de valiosa ferramenta para o estímulo científico ao estudante no processo de ensino e aprendizagem.

No que se refere à interdisciplinariedade, ainda, a trigonometria mostra-se igualmente rica em suas aplicações históricas e científicas, interagindo com a engenharia na construção das pirâmides, com as observações de eventos astronômicos, com a ordem, as órbitas e as posições dos astros no céu, entre outros campos, permitindo a construção de diversas pontes entre a matemática e os demais conteúdos do currículo escolar, em especial a história e as ciências, com exemplos concretos e significativos que podem despertar a curiosidade do aluno que possui maior apreço por outras disciplinas ou mesmo por outros campos da própria matemática, dado que a trigonometria revela também pontes com a álgebra e a análise, não estando restrita à geometria.

Os resultados da pesquisa histórica revelam, portanto, notável riqueza, evidenciando, de suas origens aos tempos modernos, tanto o modo com que a matemática permeia o universo quanto a utilidade que ela sempre apresentou, tendo nos servido na construção das civilizações desde os seus fundamentos até nos impulsionando nos avanços científicos atuais, nos ajudando a entender o universo e a explorá-lo. A história da trigonometria constitui, assim, perfeito exemplo do entrelace entre o saber matemático e o mundo ao nosso redor.

7 REFERÊNCIAS

BARBOSA, V. L. C. **O Uso do Gnômon como recurso didático no Ensino e Aprendizagem do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental.** 2020, 120 f. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Astronomia) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2020.

BERTATO, F. M. **A Falsa (Su-)Posição? Tradução dos Problemas 24, 25, 26 E 27 do Papiro de Rhind.** Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática, v. 18, nº 36, p. 11-29, março de 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRIGHT, J. **História de Israel.** Tradução: Prof. Euclides Carneiro da Silva. São Paulo: Editora Paulinas, 1978.

CÁCERES, F. **História Geral.** São Paulo: Moderna, 1996.

CALEGARI, E. **Tabela de identidades trigonométricas.** Scribd, 2013. Disponível em: https://pt.scribd.com/doc/162930783/Tabela-de-Identidades-Trigonometricas. Acesso em: 28 de dezembro de 2025.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria.** Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 10, n. 13, p. 60-69, março de 2003.

CRISTO, R. F. **Conheça Plimpton 322 – um tablete de argila com escrita cuneiforme babilônica datado em 3800 anos.** RFCIA – Matemática, Ciência, Tecnologia, Inteligência Artificial, 2018. Disponível em: https://rfcia.com.br/tag/matematica-babilonica/. Acesso em: 22 de outubro de 2025.

FÁVERO, J. D.; PITZER, L. C. **A História do Papiro de Rhind.** Revista Maiêutica, Indaial, v. 5, nº 01, p. 79-86, julho de 2017.

FIGUEIRA, D. G. **História, 1º ano: ensino médio.** São Paulo: IBEP, 2013.

FONTANA, J. **Tales de Mileto e a medição da altura da pirâmide.** Metatheoria, v. 2, nº 1, p. 23-26, Quilmes, julho de 2011.

GASPAR, J. **Matemática no Antigo Egito.** Matemática no Planeta Terra, 2013. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm. Acesso em: 22 de outubro de 2025.

GIGUET, P. P. **Histoires d'Hérodote.** Paris: Librairie de L. Hachette et Cie, 1860.

GILLINGS, R. J. **Mathematics in the time of the pharaohs.** Cambridge: MIT Press, 1972.

LIMA, A. A. N.; SILVA, M. T. V. **Trigonometria: uma discussão histórica.** 2021. 20 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Pernambuco, Campus Pesqueira, Pesqueira, 2021.

MACHO, M. **Trigonometría: la primera vez.** ZTFNews, 2013. Disponível em: https://ztfnews.wordpress.com/tag/trigonometria-sive-de-solutione-triangulorum-tractatus-brevis-et-perspicuus/. Acesso em: 28 de dezembro de 2025.

MJ. **Corda dos 13 nós.** Matemagia, 2013. Disponível em: https://mj-matemagia.blogspot.com/2013/11/corda-dos-13-nos.html. Acesso em: 22 de outubro de 2025.

NAZARÉ, W. A. **O Número de Ouro, a Sequência de Fibonacci e a contextualização de suas aplicações à aprendizagem em sala de aula para alunos do ensino fundamental II.** 2022. 33f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Campus Abaetuba – pólo Acará, Acará, 2022.

OLIVEIRA, J. **Tópicos selecionados de Trigonometria e sua história.** 2010. 68 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

OTERO, D. **The Trigonometric Functions Through Their Origins: Varahamihira and the Poetry of Sines.** 2021. 15 p. Ursinus College, Pennsylvania, 2022.

PEREIRA, A. C. C. **A obra "De Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria.** 2010, 329 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PEREIRA, A. C. C.; SILVA, I. C.; **O estudo de fontes históricas: o caso do problema 56 do Papiro de Rhind para o estudo de pirâmides.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 12 p., julho de 2016.

RIBEIRO, C. **Périplo introdutório pelos manuais da antiga matemática chinesa.** Daxiyangguo – Revista Portuguesa de Estudos Asiáticos, Lisboa, nº 29, p. 55-81, novembro de 2022.

RODRIGUES, M. **Construção de tabelas de seno nas civilizações grega, árabe e indiana.** 2020. 73 p. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

SANTOS, C. S.; SOUSA, M. V. **Ternos pitagóricos.** 2010. 8 p. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.

SILVA, T. A. **O surgimento da Trigonometria: os métodos de Hiparco e Ptolomeu na construção das primeiras tabelas trigonométricas.** 2022. 79 f. Monografia (Graduação) – Universidade Federal de Tocantins, Arraias, 2022.

SOUSA, A. M. **Currículo de trigonometria no Ensino Médio: Uma análise nos documentos oficiais, PNLD e ENEM.** 2020, 130f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2020.

VIELMO, S. **06 de Maio, Dia Nacional da Matemática.** UFSM – Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), 2015. Disponível em: https://www.ufsm.br/unidades-universitarias/ccne/2015/05/05/06-de-maio-dia-nacional-da-matematica. Acesso em: 01 de janeiro de 2026.